JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **59**, 90–122 (1984)

Spineurs symplectiques purs et indice de Maslov de plans lagrangiens positifs

BERNARD MAGNERON

Institut Universitaire de Technologie du Mans, Route de Laval, 72017 Le Mans Cédex, France

Communicated by M. Vergne

Received May 5, 1983; December 20, 1983

As is well known, each point of the closed generalized unit-disk X can be associated to a holomorphically induced representation of the Heisenberg group. First canonical intertwining operators are constructed between pairs of such representations. Next, after having introduced suitable definitions, it is noted that the classical correspondence between group extensions and 2-cocycles also makes sense when applied to transformation spaces. As an example of transformation space extension, the manifold of pure symplectic spinors is described. It is the analogue of the manifold of pure spinors when the spin representation of the Clifford algebra is replaced by the Stone–Von Neumann representation of the Heisenberg group. Then, the associated 2-cocycle m_2 is worked out, which is a $\mathbb{T}$-valued function on $X \times X \times X$, and the composition law of the canonical intertwining operators is given. Lifting m_2, an $\mathbb{R}$-valued 2-cocycle m is constructed whose restriction to the Shilov boundary of X takes integer values and coincides with the ordinary Maslov index. For this reason, it is called the generalized Maslov index. Finally, using these results, explicit realizations of the metaplectic group, its Shale–Weil representation, and the universal covering of the symplectic group are given.

INTRODUCTION

Dans les notes qui suivent, nous reprenons les travaux de Lion (voir [13, partie 1]) sur les relations entre les représentations unitaires, irréductibles du groupe de Heisenberg, la représentation de Shale–Weil du groupe symplectique et la notion d'indice de Maslov. Mais alors que dans [13], on ne considère que des représentations de type Schrödinger du groupe de Heisenberg paramétrées par des plans lagrangiens réels, nous nous plaçons dans un contexte plus général, en utilisant les représentations associées aux plans lagrangiens complexes positifs quelconques, ce qui nous permet d'englober dans le même formalisme les modèles de Fock et the Schrödinger.

La Section 1A est constituée de rappels destinés à fixer les notations. Nous introduisons l'espace X (resp. X°) des plans lagrangiens complexes positifs

0022-1236/84 $3.00

(resp. strictement positifs) d'un espace vectoriel symplectique V de dimension $2r$ et sa paramétrisation par le disque-unité généralisé fermé (resp. ouvert). Suivant la théorie des représentations induites holomorphes ([1], voir aussi [3; 18]), nous faisons correspondre à tout élément x de X une représentation unitaire, irréductible ρ_x du groupe de Heisenberg N associé à V, dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}_x$ de fonctions Φ mesurables sur N. Toutes les représentations ainsi construites sont équivalentes d'après le théorème de Stone–Von Neumann. Le groupe symplectique G de V agit sur X par l'action $x \to gx$. Par ailleurs, il est isomorphe au groupe des automorphismes de N agissant trivialement sur le centre. De plus, on a une action naturelle $D(g)$ de G sur les fonctions Φ sur N donnée par $(D(g)\,\Phi)(n) = \Phi(g^{-1}n)$ qui induit un isomorphisme de $\mathscr{H}_x$ sur $\mathscr{H}_{gx}$ tel que $D(g)\,\rho_x(n)\,D(g^{-1}) = \rho_{gx}(gn)$.

Dans 1 B, nous étudions les opérateurs d'entrelacement entre les représentations $(\mathscr{H}_1, \rho_1)$ et $(\mathscr{H}_2, \rho_2)$ associées à un couple d'éléments x_1 et x_2 de X. D'après le lemme de Schur, ils sont égaux à un facteur multiplicatif de $\mathbb{C}^*$ près. Lorsque x_1 et x_2 sont réels, des opérateurs d'entrelacement canoniques unitaires $\mathscr{F}_{x_2,x_1}$ ont été construits par Souriau [23] puis par Lion [13]. On a

$$D(g)\,\mathscr{F}_{x_2,x_1} D(g^{-1}) = \mathscr{F}_{gx_2,gx_1}$$
$$\mathscr{F}_{x_1,x_2} \cdot \mathscr{F}_{x_2,x_1} = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_1}.$$

Nous étendons les résultats de Lion et de Souriau en définissant sous forme du prolongement continu d'une intégrale, des opérateurs d'entrelacement canoniques vérifiant les relations ci-dessus, entre des représentations associées à des couples d'éléments quelconques de X. Nous utilisons pour cela les propriétés élémentaires de la transformation de Fourier et des noyaux autroreproduisants. Lorsque x_1 et x_2 sont totalement complexes, nous avons vérifié qu'à des facteurs multiplicatifs près, nos opérateurs sont équivalents à ceux construits par Satake dans [19]. Signalons enfin que, comme le montre un article de Fujiwara, Lion, et du présent auteur [9], la notion d'opérateur d'entrelacement canonique est également utile dans le cadre de la théorie des représentations induites holomorphes des groupes de Lie résolubles généraux.

Dans la Section 2, nous introduisons de façon élémentaire une théorie de la cohomologie des espaces de transformations (ou T-espaces) qui nous sert de point de repère pour la suite et qui nous semble justifiée par l'absence de référence sur le sujet (voir cependant [26] qui nous est parvenu lorsque nous rédigions la forme révisée de cet article). Nous définissons en **2.1** un T-espace comme la donnée d'un *couple* (G, X) où G est un groupe agissant sur l'espace X. Par exemple, si G est un groupe, le couple (G, G) est de façon naturelle un T-espace. Nous associons à un T-espace (G, X) et à un groupe commutatif A sur lequel G agit par automorphismes, un complexe différentiel dont le groupe des cocyles de dimension 2, noté $Z^2(X, A)$, a pour éléments les fonctions m sur $X \times X \times X$ à valeurs dans A équivariantes sous l'action de G, nulles si deux arguments successifs sont égaux et vérifiant l'identité

$$m(x_1, x_2, x_3) - m(x_0, x_2, x_3) + m(x_0, x_1, x_3) - m(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

On dit qu'un T-espace $(\tilde{G}, \tilde{X})$ est une extension par A du T-espace (G, X), s'il existe un morphisme surjectif (π', π) de $(\tilde{G}, \tilde{X})$ sur (G, X) tel que, e étant l'élément neutre de G, pour tout x de X, $(\pi'^{-1}(e), \pi^{-1}(x))$ est isomorphe à (A, A) en tant que T-espace. Un groupe $\tilde{G}$ est une extension du groupe G par A, au sens habituel de la cohomologie des groupes discrets si et seulement si, le T-espace $(\tilde{G}, \tilde{G})$ est une extension de (G, G) par A suivant notre terminologie. Cependant, la correspondance entre le deuxième groupe de cohomologie et les classes d'extensions de (G, X) par A n'est plus bijective en général comme c'est le cas pour les groupes, mais seulement injective. On est donc amené soit à construire des 2-cocycles plus généraux pour rétablir la bijection [16], soit, comme dans ce qui suit, à se restreindre aux extensions qui possèdent une fonction de Maslov. On entend par là une fonction s à valeurs dans A sur $\tilde{X} \times \tilde{X}$ qui vérifie certaines propriétés naturelles données en **2.4**, (nous avons emprunté cette terminologie à [26] où elle est utilisée dans un sens légèrement plus restrictif).

Soit $(\tilde{G}, \tilde{X}, s)$ une extension par A de (G, X) munie d'une fonction de Maslov. On peut lui faire correspondre un élément m de $Z^2(X, A)$ (voir (2.7.1)). A des équivalences convenables près, cette correspondance est une bijection. Dans la suite de l'article, on trouvera plusieurs exemples qui montrent que, dans la pratique, les 2-cocycles sont souvent d'un emploi plus commode que les extensions correspondantes.

Dans la Section 3, nous revenons au contexte de la première partie. Nous nous donnons une représentation $(\mathscr{H}, \rho)$ de N équivalente à celle de 1B. Désignant de nouveau par G le groupe symplectique, par $\mathscr{H}^\infty$ le sous-espace vectoriel des vecteurs C^∞ de $\mathscr{H}$ (resp. par $\mathscr{H}^{-\infty}$ son dual), par ρ^∞ (resp. $\rho^{-\infty}$) la représentation du complexifié de l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ de N dans $\mathscr{H}^\infty$ (resp. $\mathscr{H}^{-\infty}$), nous posons

$$\tilde{G}_1 = \{ \tilde{g} \in \mathrm{Aut}(\mathscr{H}) \mid \exists g \in G, \tilde{g}\rho(n)\tilde{g}^{-1} = \rho(gn), \forall n \in N \}$$
$$\tilde{X}_1^0 = \{ \tilde{x}' \in \mathscr{H}^\infty, \tilde{x}' \neq 0 \mid \exists x \in X^0; \rho^\infty(Y)\tilde{x}' = 0, \forall Y \in x \}$$
$$\tilde{X}_1 = \{ \tilde{x} \in \mathscr{H}^{-\infty}, \tilde{x} \neq 0 \mid \exists x \in X; \rho^{-\infty}(\bar{Y})\tilde{x} = 0, \forall Y \in x \}.$$

On a une injection naturelle de $\tilde{X}_1^0$ dans $\tilde{X}_1$. On peut définir des actions de $\tilde{G}_1$ sur $\tilde{X}_1^0$ et $\tilde{X}_1$ compatibles avec cette injection. Les T-espaces $(\tilde{G}_1, \tilde{X}_1^0)$ (resp. $(\tilde{G}_1, \tilde{X}_1)$) sont des extensions de (G, X^0) (resp. (G, X)) par $\mathbb{C}^*$. Nous appelons les éléments de $\tilde{X}_1$, spineurs symplectiques purs. Cette terminologie est en accord avec celle de Kostant dans le cas où x est réel [11].

Le produit scalaire sur $\mathscr{H}$ permet de construire facilement une fonction de Maslov s_1 pour $(\tilde{G}_1, \tilde{X}_1^0)$. De plus, bien que les éléments de $\tilde{X}_1$ soient des vecteurs-distributions, nous construisons une fonction naturelle s_2' à valeurs dans le tore $\mathbb{T}$ sur $\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_1$ qui prolonge le produit scalaire, du moins en ce qui concerne les phases. On obtient ainsi un couplage entre des couples de spineurs symplectiques purs quelconques qui prolonge le couplage de Kostant qui n'était défini que lorsque les plans lagrangiens associées sont réels et transverses [11, 6.1]. On en déduit l'existence d'une fonction de Maslov s_2 pour $\tilde{G}_2 = \tilde{G}_1/\mathbb{R}_+^*$; $\tilde{X}_2 = \tilde{X}_1/\mathbb{R}_+^*$.

Nous commençons la Section 4 par un calcul des 2-cocycles m_1 et m_2 de $Z^2(X^0, \mathbb{C}^*)$ et de $Z^2(X, \mathbb{T})$ associés à $(\tilde{G}_1, \tilde{X}_1^0, s_1)$ et à $(\tilde{G}_2, \tilde{X}_2, s_2)$. Cela nous permet d'expliciter les lois de composition des opérateurs d'entrelacement canoniques. Après quoi, utilisant un argument de connexité, nous construisons un élément m de $Z^2(X, \mathbb{R})$ tel que $e^{i(\pi/4)m} = m_2$. Nous le calculons explicitement.

Si Λ est la variété des plans lagrangiens réels de V et si l'élément μ de $Z^2(\Lambda, \mathbb{Z})$ désigne l'indice de Maslov ordinaire défini par Leray–Souriau–Kashiwara (voir [13]), on a sur $\Lambda \times \Lambda \times \Lambda$, $m(l_0^{\mathbb{C}}, l_1^{\mathbb{C}}, l_2^{\mathbb{C}}) = \mu(l_0, l_1, l_2)$. Pour cette raison la fonction m est appelée indice de Maslov généralisé.

Dans la Section 5, on considère l'extension $(\tilde{G}_1^2, (\tilde{X}_1^0)^2)$ resp. $(\tilde{G}_2^2, \tilde{X}_2^2)$ de (G, X^0) (resp. (G, X)) par $\mathbb{C}^*$ (resp. $\mathbb{T}$) associé au cocycle m_1^2 (resp. m_2^2) obtenu en prenant le carré de m_1 (resp. m_2). On remarque que $\tilde{G}_1^2$ (resp. $\tilde{G}_2^2$) est, de façon unique, une extension triviale du groupe G. On a donc une action naturelle de G sur $(\tilde{X}_1^0)^2$ et $\tilde{X}_2^2$. Nous en précisons les orbites et nous remarquons que certaines d'entre elles sont isomorphes à la grassmannienne des plans lagrangiens orientés.

Soit $(\tilde{G}, \tilde{X})$ l'extension de (G, X) par $\mathbb{R}$ avec fonction de Maslov, associée à m. Pour des raisons cohomologiques le revêtement universel $\hat{G}$ de G s'injecte dans $\tilde{G}$. Soit P un point de X considéré comme origine. On peut lui associer une réalisation $\hat{G}(P)$ de $\hat{G}$ qui est une réalisation de Kashiwara (voir [13]) dans le cas où P est réel. Certains des cocycles du groupe G qui apparaissent ont déjà été explicités par Dupont–Guichardet–Wigner dans le cadre de la cohomologie des groupes de Lie simples réels [7; 8]. Nous donnons aussi une réalisation $\hat{G}_1(O)$ du relèvement à deux feuillets de G ou groupe métaplectique associée à $O \in X^0$. A l'aide des opérateurs d'entrelacement canoniques, nous explicitons la représentation de Shale–Weil de $\hat{G}_1(O)$ dans l'espace de Fock $\mathscr{H}_O$. Nos résultats sont voisins de ceux de [19], mais notre formalisme est plus maniable et plus général. Il nous permettrait aussi bien de construire la représentation de Shale–Weil du group métaplectique dans l'espace de Schrödinger (voir [13]).

1. Opérateurs d'Entrelacement Canoniques

A. *Notations et Rappels*

1.1. Dans toute la suite, on se donne un espace vectoriel réel V de dimension $2r$ muni d'une forme bilinéaire alternée, non dégénérée, B. Le prolongement par linéarité de B à $V^{\mathbb{C}}$ est aussi noté B. On désigne par $\bar{\ }$ la conjugaison dans $V^{\mathbb{C}}$. On dit qu'une base $(P_j, Q_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est symplectique si elle vérifie les relations

$$B(P_j, P_k) = B(Q_j, Q_k) = 0, \qquad B(P_j, Q_k) = \delta_{jk}.$$

Pour $W \subseteq V$, on pose $W^{\perp} = \{v \in V \mid B(v, v') = 0, \forall v' \in W\}$.

Soit X l'ensemble des sous-espaces vectoriels complexes x de $V^{\mathbb{C}}$ qui sont totalement isotropes maximaux pour B et qui sont tels que la restriction à x de la forme hermitienne antilinéaire à gauche sur $V^{\mathbb{C}}$, donnée par $(v_1, v_2) \mapsto 2iB(\bar{v}_1, v_2)$ est semi-définie, positive. On les appelle plans lagrangiens positifs. On a une action naturelle du groupe symplectique G de (V, B) sur X. On pose pour $0 \leqslant p \leqslant r$, $X^p = \{x \in X \mid \dim x \cap V = p\}$. Soit Λ l'espace des plans lagrangiens réels l qui sont totalement isotropes maximaux pour (V, B) et $l \to l^{\mathbb{C}}$ la bijection naturelle de Λ sur X^r. Les éléments de X^0, associés à une forme hermitienne strictement positive, sont appelés plans lagrangiens strictement positifs; ils sont totalement complexes: on a $x + \bar{x} = V^{\mathbb{C}}$.

Soit V' un espace vectoriel réel muni d'une forme bilinéaire alternée quelconque B'. On peut reprendre la définition précédente pour introduire comme précédemment l'ensemble noté $X(V')$ des sous-espaces vectoriels totalement isotropes maximaux de $V'^{\mathbb{C}}$, associés à une forme hermitienne semi-définie positive. On a donc $X(V) = X$.

Nous désignerons toujours par O, un élément privilégié de X^0 qui servira d'origine pour X. Comme $O \cap V = \{0\}$, on note J l'élément de End V, tel que $O = (\mathrm{Id}_V - iJ)\, V$. On a $J^2 = -\mathrm{Id}_V$. Posons $\alpha = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_V - iJ)$. Alors α (resp. $\bar{\alpha}$) est une bijection linéaire (resp. antilinéaire) de (V, J) sur O (resp. $\bar{O}$). De plus, $\alpha^{\mathbb{C}}$ et $\bar{\alpha}^{\mathbb{C}}$ sont des projecteurs supplémentaires de $V^{\mathbb{C}}$.

Soit H, la forme hermitienne, définie positive sur (V, J), donnée par

$$H(v_1, v_2) = 2iB(\bar{\alpha} v_1, \alpha v_2) = S(v_1, v_2) + iB(v_1, v_2)$$

avec

$$S(v_1, v_2) = B(v_1, Jv_2).$$

Si $x \in X$, $x/x \cap \bar{x}$ est un plan lagrangien strictement positif de

$V_x = (x + \bar{x}) \cap V / x \cap V$. On note J_x la structure complexe associée à $x / x \cap \bar{x}$ dans V_x. On peut trouver une base symplectique de V telle que

$$x = \bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant p} \mathbb{C} Q_j \bigoplus_{p < j \leqslant r} \mathbb{C}(P_j - iQ_j).$$

Soit $(\mathscr{Z}, \| \ \|)$, le sous-espace vectoriel normé de $\mathrm{Hom}(\bar{O}, O)$ formé par les éléments Z qui vérifient la relation $B(Zv_1, v_2) = -B(v_1, Zv_2)$ sur $\bar{O} \times \bar{O}$ avec

$$\|Z\| = \sup_{v \in O, v \neq 0} \sqrt{B(\bar{Z}v, Z\bar{v})/B(\bar{v}, v)}.$$

A tout élément x de X, on peut associer un élément Z_x de $\mathscr{Z}$ dont le graphe dans $V^{\mathbb{C}}$ est $\bar{x}$. En effet, $\bar{x} \cap O = \{0\}$. La correspondance $x \to Z_x$ établit une bijection de X^0 (resp. X) sur la boule unité ouverte (resp. fermée) de $\mathscr{Z}$. On obtient ainsi une paramétrisation de X par le disque-unité genéralisé de Siegel. Pour le voir plus explicitement, on choisit $l \in \Lambda$, on a alors $V = l \oplus Jl$. Soit σ l'involution J-antilinéaire de V définie par $\sigma(v_1 + Jv_2) = v_1 - Jv_2$ pour $v_1, v_2 \in l$. Sur $V \times V$, on pose $S_\sigma(v, v') = H(\sigma v, v')$. La forme S_σ est J-bilinéaire et symétrique. L'application $x \to \mathscr{Z}_x = \sigma\alpha^{-1} Z_x \bar{\alpha}$ met X (resp. X^0) en bijection avec l'ensemble des endomorphismes J-linéaires $\mathscr{Z}$ de V, S_σ-symétriques et tels que $\mathrm{Id}_V - \bar{\mathscr{Z}}\mathscr{Z} \geqslant 0$ (resp. >0).

1.2.. Etant donnés g dans G et x dans X^0, on définit $a_x(g)$ dans $\mathrm{End}(x)$ et $b_x(g)$ dans $\mathrm{Hom}(\bar{x}, x)$ par la formule $gv = (a_x(g) + \bar{b}_x(g))\, v$ pour $v \in x$. Nous écrirons $a(g)$ et $b(g)$ au lieu de $a_O(g)$ et $b_O(g)$. Identifiant $\bar{O}$ avec le dual de O par B, on définit les transposés ${}^t a(g) \in \mathrm{End}(\bar{O})$ et ${}^t b(g) \in \mathrm{Hom}(\bar{O}, O)$ de $a(g)$ et $b(g)$. On a

$$\begin{aligned} {}^t\bar{a}(g)\, b(g) + {}^t b(g)\, \bar{a}(g) &= 0 \quad . \\ {}^t\bar{a}(g)\, a(g) + {}^t b(g)\, \bar{b}(g) &= \mathrm{Id}_O. \end{aligned}$$

Soit $x \in X$, $g \in G$, posant $a(g) = a$, $b(g) = b$, on a

$$Z_{gx} = (aZ_x + b)(\bar{b}Z_x + \bar{a})^{-1}.$$

Soient $x_j \in X$, $(j = 1, 2)$, $g \in G$. On pose $Z_{x_j} = Z_j$, $Z_{gx_j} = Z'_j$, $\mathrm{Id}_O = I$. On a les formules

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad I - Z'_1 \bar{Z}'_2 = {}^t(\bar{b}Z_1 + \bar{a})^{-1}(I - Z_1\bar{Z}_2)(b\bar{Z}_2 + a)^{-1}, \\ &\text{(b)} \quad (I - Z'_1\bar{Z}'_1)^{-1}(I - Z'_1\bar{Z}'_2) = (b\bar{Z}_1 + a)(I - Z_1\bar{Z}_1)^{-1} \\ &\qquad\qquad \times (I - Z_1\bar{Z}_2)(b\bar{Z}_2 + a)^{-1}, \text{ si } x_1 \in X^0. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

1.3. A un espace vectoriel réel V', muni d'une forme bilinéaire alternée quelconque B', on peut associer l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}(V') = V' \oplus \mathbb{R}c$, où c est un vecteur de $\mathbb{R}$, dont le crochet est défini comme suit:

$$[v_1, v_2] = B'(v_1, v_2)\, c \qquad \text{sur} \quad V' \times V'$$

$$[\mathfrak{n}(V'), c] = 0 \qquad \text{autrement dit } \mathbb{R}c \text{ est dans le centre de } \mathfrak{n}(V').$$

Soit $N(V')$ le groupe de Lie, connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}(V')$ soit $1_{N(V')}$ son élément neutre. On pose $C = \exp \mathbb{R}c$. L'application exponentielle étant un difféomorphisme de $\mathfrak{n}(V')$ sur $N(V')$, tout élément n de $N(V')$ peut se mettre sous la forme $\exp(v + tc)$, où $v \in V'$, $t \in \mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned}&\exp(v_1 + t_1 c) \exp(v_2 + t_2 c)\\ &\quad = \exp[v_1 + v_2 + (t_1 + t_2 + \tfrac{1}{2} B'(v_1, v_2))\, c].\end{aligned}$$

Lorsque $V' = V$, $B' = B$, on écrira $\mathfrak{n}$ et N au lieu de $\mathfrak{n}(V)$ et $N(V)$. Le groupe N est le groupe de Heisenberg de dimension $(2r + 1)$.

Dans toute la suite, λ désigne un élément fixe de $\mathbb{R}_+^*$ (dans la pratique $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2\pi$). Sur N, on définit la fonction f donnée par $f(\exp(v + tc)) = e^{i\lambda t}$.

Etant donnés une fonction Φ, C^∞ sur $N(V')$ et un élément Y de $\mathfrak{n}(V')$, nous posons

$$[\mathscr{L}(Y)\, \Phi](n) = \frac{d}{dt}\, \Phi(\exp - tY\, n) \Big|_{t=0}$$

$$[\mathscr{R}(Y)\, \Phi](n) = \frac{d}{dt}\, \Phi(n \exp tY) \Big|_{t=0}.$$

On prolonge $\mathscr{L}$ et $\mathscr{R}$ à $\mathfrak{n}(V')^{\mathbb{C}}$ par linéarité puis à l'algèbre enveloppante $\mathscr{U}(\mathfrak{n}(V')^{\mathbb{C}})$ par compositions.

1.4. Proposition. (1) *Soient* $x_1, x_2 \in X$, *alors* $x_1 \cap \overline{x_2} = (x_1 \cap x_2 \cap V)^{\mathbb{C}}$ *et* $x_1 + \overline{x_2} = V_{12}^{\mathbb{C}}$ *où* $V_{12} = (x_1 \cap x_2 \cap V)^{\perp}$.

(2) *Il existe une fonction* C^∞ *sur* $N(V_{12})$, *unique, qu'on note* K_{x_1, x_2} *ou simplement* K_{12}, *avec* $K_{12}(1_{N(V_{12})}) = 1$, *telle que*

(i) $K_{12}\, (n \exp tc) = e^{-i\lambda t} K_{12}(n)$; $\mathscr{R}(\overline{Y})\, K_{12} = 0$; $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall Y \in x_2$.

(ii) $\mathscr{L}(Y)\, K_{12} = 0$, $\forall Y \in x_1$.

Preuve. (1) Soit $v \in x_1 \cap \overline{x_2}$, du fait de la positivité de x_1 et de x_2, on a $2iB(\bar{v}, v) = 0$ puis $2iB(\bar{v}', v) = 0$, $\forall v' \in x_1$. Donc $x_1 \cap \overline{x_2} \subseteq \overline{x_1}$ et $x_1 \cap \overline{x_2} = (x_1 \cap x_2 \cap V)^{\mathbb{C}}$. De plus $(x_1 + \overline{x_2}) = (x_1 \cap \overline{x_2})^{\perp}$.

(2) Soit $N_{12}^{\mathbb{C}}$ le groupe de Lie connexe et simplement connexe,

d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}(V_{12})^{\mathbb{C}}$. Il existe une fonction unique $K^{\mathbb{C}}$, C^{∞} sur $N_{12}^{\mathbb{C}}$, telle que

$$K^{\mathbb{C}}(\exp - Y\, n) = K^{\mathbb{C}}(n), \quad \forall Y \in x_1, \qquad K^{\mathbb{C}}(n \exp \bar{Y}) = K^{\mathbb{C}}(n), \quad \forall Y \in x_2,$$
$$K^{\mathbb{C}}(n \exp tc) = e^{-i\lambda t} K^{\mathbb{C}}(n) \qquad \text{et} \qquad K^{\mathbb{C}}(1_{N_{12}^{\mathbb{C}}}) = 1.$$

Si $\bar{p}_2$ (resp. p_1) désigne la projection sur $\bar{x}_2$ parallèlement à x_1 (resp. sur x_1 parallèlement à $\bar{x}_2$) dans $V^{\mathbb{C}}$, on a

$$K^{\mathbb{C}}(\exp(v + tc)) = e^{(i\lambda/2)B(p_1 v, \bar{p}_2 v)} e^{-i\lambda t}.$$

La restriction de $K^{\mathbb{C}}$ au sous-groupe $N(V_{12})$ de $N_{12}^{\mathbb{C}}$ est la seule fonction qui vérifie les conditions de la proposition.

Supposons que $x_1 = x$, $x_2 = O$. On a $V_{12} = V$. Posons $Z_x = Z$, il vient

$$\begin{aligned} K_{O,x}(\exp v) &= e^{i(\lambda/2)B(\alpha v - Z\bar{\alpha} v, \bar{\alpha} v + Z\bar{\alpha} v)} \\ &= e^{-(\lambda/4)H(v,\, v - \alpha^{-1} Z\bar{\alpha} v)}. \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Pour $x \in X$, on pose $K_x = K_{x,x}$. Si $x = O$, on retrouve la gaussienne classique sur V:

$$K_O(\exp(v + tc)) = e^{-(\lambda/4)S(v,\, v)} e^{-i\lambda t}.$$

Les fonctions K_{12} sont directement liées au concept de spineurs symplectiques purs (voir Proposition 3.6). Elles ont déjà été utilisées implicitement dans beaucoup de cas (Bargmann [2], Satake [19], Vergne [24, Proposition II.6], et Segal [20; 21].

1.5. D'après le théorème de Stone–Von Neumann (voir [13]), il existe, à isomorphisme près, une et une seule représentation unitaire irréductible ρ de N dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, telle que $\rho(\exp tc) = e^{i\lambda t}\, \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$. Rappelons comment la théorie des représentations induites holomorphes permet d'associer à tout point x de X une représentation de ce type [1], voir aussi [3, Chap. VII; 18].

Soient les sous-groupes $D_x = N(x \cap V)$ et $E_x = N((x + \bar{x}) \cap V)$ de N. Pour simplifier, nous les notons D et E dans ce paragraphe. Définissons X' comme l'ensemble des couples $x' = (x, d\dot{n})$ où $x \in X$ et $d\dot{n}$ est une mesure N-invariante sur N/D. On a une action naturelle de G sur X'. Soit $(x, d\dot{n}) \in X'$, considérons l'espace préhilbertien formé par les fonctions Φ, C^{∞} sur N, vérifiant les relations

$$\Phi(n \exp tc) = e^{-i\lambda t}\Phi(n), \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{R}(\bar{Y})\, \Phi = 0, \quad \forall Y \in x.$$

et muni du produit scalaire donné par $\int_{N/D} \Phi_1 \bar{\Phi}_2(n)\, d\dot{n}$.

Soit $(\mathscr{H}_x, (\,|\,)_{x'})$ son complété. On a une représentation unitaire ρ_x de N dans $\mathscr{H}_x$ définie par $(\rho_x(h)\,\Phi)(n) = \Phi(h^{-1}n)$. On démontre qu'elle est irréductible. C'est une sous-représentation de la représentation induite à N du caractère $f_{|D}$ de D. Soit $v \to \dot{v}$ la projection canonique de $(x+\bar{x}) \cap V$ sur $V_x = (x+\bar{x}) \cap V/x \cap V$. L'espace $\mathscr{H}_x$ est en bijection avec les classes de fonctions mesurables Φ sur N telles que

(i) $\Phi(nh) = f(h^{-1})\,\Phi(n)$, $\forall h \in D$, n-presque partout.

(ii) $\dot{v} \to \Phi(n \exp v)\,K_x^{-1}(\exp v)$ est une fonction holomorphe sur (V_x, J_x), n-presque partout.

(iii) $\int_{N/D} |\Phi|^2\, d\dot{n} < \infty$.

Plus généralement, si x est un élément de $X(V')$, la construction précédente permet d'obtenir une représentation de $N(V')$ notée $\rho_x(N(V'))$ dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}_x(N(V'))$. Nous avons donc $\mathscr{H}_x(N) = \mathscr{H}_x$.

La représentation de N associée à un plan lagrangien strictement positif (resp. réel) de V est la représentation de Fock ([2] et Proposition 5.7) (resp. la représentation de Schrödinger, voir [13]).

1.6. Soit, dans un contexte général, $(\mathscr{H}, \rho)$ une représentation unitaire d'un groupe de Lie quelconque N. On note $\mathscr{H}^\infty$, l'espace de Fréchet des éléments C^∞ de la représentation (resp. $\mathscr{H}^{-\infty}$ son dual) et ρ^∞ (resp. $\rho^{-\infty}$) la représentation naturelle de l'algèbre enveloppante $\mathscr{U}(\mathfrak{n}^{\mathbb{C}})$ de N dans $\mathscr{H}^\infty$ (resp. $\mathscr{H}^{-\infty}$). La topologie de $\mathscr{H}^\infty$ est engendrée par les familles de semi-normes $\Phi \to \|\rho^\infty(Y)\,\Phi\|$, où $Y \in \mathscr{U}(\mathfrak{n})^{\mathbb{C}}$ (voir [4]).

Revenant aux notations précédentes, on vérifie que les éléments de $\mathscr{H}_x^\infty(N(V'))$ correspondent aux fonctions Φ, C^∞ sur $N(V')$ telles que

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \Phi(n \exp tc) = e^{-i\lambda t}\Phi(n),\ \forall t \in \mathbb{R}, \text{ et } \mathscr{R}(\bar{Y})\,\Phi = 0,\ \forall Y \in x. \\ &\text{(ii)} \quad |\mathscr{L}(Y)\,\Phi| = \sup_{n \in N(V')} |\mathscr{L}(Y)\,\Phi(n)| < \infty,\ \forall Y \in \mathscr{U}(\mathfrak{n}(V')^{\mathbb{C}}.) \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

On a $\rho^\infty(Y)\,\Phi = \mathscr{L}(Y)\,\Phi$, pour tout Y de $\mathfrak{n}(V')^{\mathbb{C}}$. De plus, la topologie de $\mathscr{H}_x^\infty(N(V'))$ est engendrée par la famille de semi-normes $\Phi \to |\mathscr{L}(Y)\,\Phi|$.

Plus concrètement, soit W un supplémentaire de $x \cap V'$ dans V', les éléments de $\mathscr{H}_x^\infty(N(V'))$ correspondent aux fonctions Φ, C^∞ sur $N(V')$) vérifiant le (i) ci-dessus et la condition suivante:

(ii′) la fonction Φ_W sur W, donnée par $\Phi_W(v) = \Phi(\exp v)$, appartient à l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(W)$ des fonctions à décroissance rapide sur W.

La correspondance $\Phi \to \Phi_W$ établit un isomorphisme d'espaces de Fréchet de $\mathscr{H}_x^\infty(N(V'))$ sur son image dans $\mathscr{S}(W)$ (voir [9]).

1.7. Le groupe symplectique se réalise comme le groupe des automorphismes de N qui préservent son centre, par la formule

$g\exp(v+tc)=\exp(gv+tc)$. On a une action de G sur les fonctions sur N donnée par $(D(g)\Phi)(n)=\Phi(g^{-1}n)$. Soit $x'=(x,d\dot{n})\in X'$. Alors $D(g)$ établit une bijection unitaire de $(\mathscr{H}_x,(\ |\ )_{x'})$ dans $(\mathscr{H}_{gx},(\ |\ )_{gx'})$. De plus,

$$D(g)\,\rho_x(n)\,D(g^{-1})=\rho_{gx}(gn),\qquad \forall n\in N.$$

B. *Les Opérateurs d'Entrelacement Canoniques*

Soient $x_j'=(x_j,d_j\dot{n})$, $j=1,2$, deux éléments de X', associés aux groupes E_j,D_j et aux représentations $(\mathscr{H}_j,\rho_j,(\ |\ )_j)$ comme dans **1.5**. Soit F_2 un élément de l'espace $\mathscr{H}_2(E_2)=\mathscr{H}_{x_2}(E_{x_2})$. Pour $\Phi\in\mathscr{H}_1$, la fonction $h\to\Phi(nh^{-1})\,F_2(h)$ est constante sur $D_1\cap D_2$. Définissons formellement l'opérateur

$$(\mathscr{F}\Phi)(n)=\int_{E_2/D_1\cap D_2}\Phi(nh^{-1})\,F_2(h)\,d\dot{h}.$$

Formellement, on voit que $\mathscr{F}\Phi(n\exp tc)=e^{-i\lambda t}\mathscr{F}\Phi(n)$, que $\mathscr{R}(\bar{Y})\mathscr{F}\Phi=0$, $\forall Y\in x_2$ et que $\mathscr{F}$ commute avec l'action de N. On peut donc penser que $\mathscr{F}$ définit un opérateur d'entrelacement. D'autre part, la fonction $K_{x_2}=K_2$ de la Proposition 1.4 nous fournit un élément privilégié de $\mathscr{H}_2^\infty(E_2)$. C'est le seul élément de $\mathscr{H}_2(E_2)$ invariant par la transformation $\Phi\to\check{\Phi}$, $\check{\Phi}(h)=\overline{\Phi(h^{-1})}$.

1.8. Théorème. (1) *Il existe un opérateur d'entrelacement unitaire $\mathscr{F}_{x_2',x_1'}=\mathscr{F}_{21}$ de $(\mathscr{H}_1,\rho_1)$ dans $(\mathscr{H}_2,\rho_2)$ défini par la formule*

$$(\mathscr{F}_{21}\Phi)(n)=\int_{E_2/D_1\cap D_2}\Phi(nh^{-1})\,K_2(h)\,d\dot{h}$$

(*où $d\dot{h}$ est une certaine mesure E_2-invariante de $E_2/D_1\cap D_2$*), *sur le sous-espace vectoriel $\mathscr{H}_1^2$ des éléments Φ de $\mathscr{H}_1$ pour lesquels cette intégrale converge pour presque tout n de N. On a $\mathscr{H}_1^\infty\subseteq\mathscr{H}_1^2$ et, chaque fois que $x_2\cap V\subseteq x_1\cap V$, $\mathscr{H}_1^2=\mathscr{H}_1$.*

(2) *On a*

$$(\mathscr{F}_{21}\Phi_1\,|\,\Phi_2)_2=(\Phi_1\,|\,\mathscr{F}_{12}\Phi_2)_1=\int_{N/D_1\cap D_2}\Phi_1\bar{\Phi}_2\,d\dot{n}$$

(*où $d\dot{n}$ est une certaine mesure N-variante de $N/D_1\cap D_2$*), *sur le sous-espace vectoriel des éléments (Φ_1,Φ_2) de $\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$ pour lesquels cette intégrale converge. Ce sous espace contient $\mathscr{H}_1^\infty\times\mathscr{H}_2^\infty$ et est égal à $\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$ tout entier lorsque $x_1\cap V=x_2\cap V$.*

Preuve. Une partie de ce théorème est une conséquence d'un résultat de Poulsen ([17, Théorème 3.4; et 4, Théorème 2.3]). Nous donnons ici une démonstration élémentaire plus instructive mais plus longue.

La mesure E_2-invariante $d\dot{h}$ est déterminée par le fait que $\mathscr{F}_{12}$ est unitaire, elle peut être choisie quelconque si on abandonne cette condition. Nous posons, a priori,

$$\begin{aligned} I_{21}\Phi(n) &= \int_{E_2/D_1 \cap D_2} \Phi(nh^{-1})\, K_2(h)\, d\dot{h} \\ &= \int_{(x_2+\bar{x}_2)\cap V/x_1\cap x_2\cap V} \Phi(n \exp - v)\, K_2(\exp v)\, d\dot{v}. \end{aligned}$$

La deuxième égalité est justifiée par le fait que si on se donne deux sous-espaces vectoriels V_1 et V_2 de V tels que $V_1 \subseteq V_2$ et un supplémentaire W de V_1 dans V_2, l'application $v \to \exp v$ définit un difféomorphisme de W sur $N(V_1)/N(V_2)$ qui fait correspondre aux mesures de Lebesgue $d\dot{v}$ sur $W \simeq V_1/V_2$, les mesures $N(V_1)$-invariantes $d\dot{n}$ sur $N(V_1)/N(V_2)$.

Utilisant **1.6**, on voit que $I_{21}\Phi$ est défini pour tout n de N, lorsque $\Phi \in \mathscr{H}_1^\infty$ et que l'intégrale du (2) converge sur $\mathscr{H}_1^\infty \times \mathscr{H}_2^\infty$.

(a) Le théorème est vérifié dans les quatre cas particuliers qui suivent:

1er cas. dim $V = 2$, $\{P, Q\}$ est une base symplectique de (V, B), $x_1 = \mathbb{R}P$, et $x_2 = \mathbb{R}Q$. Rappelons que la correspondance $\Phi \to (q \rightharpoonup \Phi(\exp qQ))$ établit un isomorphisme de $\mathscr{H}_1$ sur $L^2(dq)$.

Pour $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la transformation de Fourier $\mathscr{F}_\beta$ comme étant l'opérateur unitaire sur $L^2(dq)$ dont la restriction à $L^1(dq) \cap L^2(dq)$ est donnée par $(\mathscr{F}_\beta \Psi)(p) = \int \Psi(q)\, e^{-i\beta pq}\, dq$. D'après [13, 1.4], on obtient un opérateur qui vérifie les conditions du théorème, si on pose

$$(\mathscr{F}_{21}\Phi)(\exp pP \exp qQ \exp tc) = e^{-i\lambda t} \mathscr{F}_\lambda(q' \to \Phi(\exp q'Q))(p).$$

2ème et 3ème cas. dim $V = 2$, $\{P, Q\}$ est une base symplectique, dans le deuxième cas $x_1 = \mathbb{C}(P - iQ)$, $x_2 = \mathbb{C}Q$, dans le troisième cas, on intervertit x_1 et x_2. On voit que $\mathscr{H}_1$ est un espace de Fock. Utilisant les techniques de [18, 2.3); 3, VII], on obtient des opérateurs d'entrelacement explicites, définis sur $\mathscr{H}_1$ (resp. $\mathscr{H}_2$) et vérifiant le (1) du théorème, donnés par les formules

$$(\mathscr{F}_{21}\Phi)(\exp pP \exp qQ \exp tc) = e^{-i\lambda t} \mathscr{F}_\lambda(q' \to \Phi(\exp(\not{p}P + q'Q))\left(\frac{p}{2}\right)$$

(resp. $(\mathscr{F}_{12}\Phi)(n) = I_{12}\Phi(n)$).

On a alors successivement, ce qui donne le (2),

$$\int_{N/C} \Phi_1 \bar{\Phi}_2 \, d\dot{n} = \int_{N/D_2} (\mathscr{F}_{21}\Phi_1)\, \bar{\Phi}_2 \, d\dot{n} = (\mathscr{F}_{21}\Phi_1, \Phi_2)_2 = (\Phi_1, \mathscr{F}_{12}\Phi_2)_1.$$

4ème cas. x_1 et x_2 sont strictement positifs. Soit δv la mesure de Lebesgue sur V associée à la 1-densité $(\lambda/2\pi)^r\,|A^rB|$ et $\delta\dot{n}$ la mesure correspondante sur N/C. Soit $(\mathscr{H}(N), \rho, (\ |\ ))$ la représentation induite de C à N par le caractère $f|_C$, dans l'espace de Hilbert associé à la mesure $\delta\dot{n}$. Utilisant les noyaux autoreproduisants, on démontre le

1.9. LEMME. *Soit $x \in X^0$, le projecteur orthogonal $\mathscr{P}_x$ de $\mathscr{H}(N)$ sur $\mathscr{H}_x$ est donné par la formule*

$$(\mathscr{P}_x\Phi)(n) = \int_{N/C} \Phi(nh^{-1})\, K_x(h)\, \delta\dot{h}.$$

La restriction à $\mathscr{H}_1$ du projecteur $\mathscr{P}_2$ de $\mathscr{H}(N)$ sur $\mathscr{H}_2$, nous donne un opérateur d'entrelacement $\mathscr{F}_{21}$ qui vérifie le (1) du théorème. Sur $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$, on a $(\Phi_1 \mid \Phi_2) = (\mathscr{P}_2\Phi_1 \mid \Phi_2)$, ce qui en prouvant le (2) achève la démonstration du théorème dans ce cas.

(b) Supposons qu'on puisse décomposer V sous la forme $W \oplus^{\perp} W'$ de telle sorte que, pour $j = 1, 2$, on ait $x_j = y_j \oplus y'$ où $y_j = x_j \cap W^{\mathbb{C}} \in X(W)$ et $y' = x_1 \cap W'^{\mathbb{C}} = x_2 \cap W'^{\mathbb{C}} \in X(W')$. Supposons de plus que le théorème soit vrai pour les représentations $\rho_{y_j}(N(W))$ de $N(W)$ (notations de **1.5**). Alors, en utilisant les propriétés des représentations induites, on vérifie qu'il existe un opérateur d'entrelacement $\mathscr{F}$ de $(\mathscr{H}_1, \rho_1)$ dans $(\mathscr{H}_2, \rho_2)$ donné, chaque fois que cela a un sens, par la formule

$$\mathscr{F}\Phi(n) = \int_{(x_2+\bar{x}_2)\cap W/x_1\cap x_2\cap W} \Phi(n \exp - v)\, K_2(\exp v)\, d\dot{v}.$$

(c) Démontrons maintenant le théorème par récurrence sur la dimension r de V. Nous le supposons donc exact jusqu'au rang $r-1$. Remarquons que le cas où $\dim(x_1 \cap x_2 \cap V) = r$ est trivial. On a facilement le

1.10. LEMME. *Soient deux éléments x_1, x_2 de X tels que $\dim(x_1 \cap x_2 \cap V) < r$, alors on peut décomposer V sous la forme $W \oplus^{\perp} W'$ de telle sorte que, pour $j = 1, 2$, on ait $x_j = y_j \oplus y'_j$ où $y_j = x_j \cap W^{\mathbb{C}}$ et $y'_j = x_j \cap W'^{\mathbb{C}}$ et qu'on soit dans l'une des situations suivantes*:

(a) $\dim W = 2$, $y_1 = \mathbb{C}P$, $y_2 = \mathbb{C}Q$, *$\{P, Q\}$ est une base symplectique de W.*

(b) $\dim W = 2$, $y_1 = \mathbb{C}(P - iQ)$, $y_2 = \mathbb{C}Q$, $\{P, Q\}$ *est une base symplectique de* W.

(c) *dans le* (*b*), *on inverse* y_1 *et* y_2.

(d) y_1 *et* y_2 *sont des plans lagrangiens strictement positifs.*

Dans le contexte du lemme, posons $x_3 = y_2 \oplus y_1'$. D'après le (a), le (b), et l'hypothèse de récurrence, on a un opérateur d'entrelacement $\mathscr{F}'_{31}$ (resp. $\mathscr{F}'_{23}$) de $\mathscr{H}_1$ dans $\mathscr{H}_3$ (resp. de $\mathscr{H}_3$ dans $\mathscr{H}_2$) donné, lorsque cela a un sens, par

$$\mathscr{F}'_{31}\, \Phi(n) = \int_W \Phi(n \exp - v)\, K_2(\exp v)\, dv$$

$$(\text{resp.}\ \mathscr{F}'_{23}\, \Phi(n) = \int_{(x_2 + \bar{x}_2) \cap W' / x_1 \cap x_2 \cap W'} \Phi(n \exp - v')\, K_2(\exp v')\, dv').$$

Du fait que $K_2(\exp(v + v')) = K_2(\exp v)\, K_2(\exp v')$, on déduit que sur $\mathscr{H}_1^2$, $I_{21} \Phi = \mathscr{F}'_{23} \mathscr{F}'_{31} \Phi$, ce qui prouve le (1) du théorème 1.8. Une application répétée du théorème de Fubini et le fait que $\mathscr{F}_{21} = \mathscr{F}'_{23} \mathscr{F}'_{31}$ impliquent le (2).

Les opérateurs $\mathscr{F}_{21}$ sont appelés *opérateurs d'entrelacement canoniques*. Ils vérifient les propriétés suivantes, où $x_j' = (x_j, d_j \dot{n}) \in X'$ pour $j = 1, 2$:

1.11. Proposition. (a) $\mathscr{F}_{11} = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_1}$

(b) $\mathscr{F}_{12} \mathscr{F}_{21} = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_1}$

(c) $D(g) \mathscr{F}_{x_2', x_1'} D(g^{-1}) = \mathscr{F}_{g x_2', g x_1'}$, $\forall g \in G$.

Preuve. Prouvons le (b) par example. On a d'après le (2) du Théorème 1.8,

$$(\mathscr{F}_{12} \mathscr{F}_{21} \Phi \mid \Phi')_1 = (\mathscr{F}_{21} \Phi \mid \mathscr{F}_{21} \Phi')_2 = (\Phi \mid \Phi')_1.$$

1.12. On vérifie qu'on peut, dans l'énoncé du (1) du Théorème 1.8, remplacer K_2 par n'importe quelle fonction non nulle F_2 de $\mathscr{H}_2^\infty(E_2)$, mais l'égalité du (2) n'est plus vérifiée qu'à un scalaire multiplicatif près, même lorsque $F_2(1_N) = 1$.

2. Contexte Cohomologique: Extensions de T-Espaces

Dans ce paragraphe, qui peut être lu indépendamment du reste de l'exposé, nous développons une théorie élémentaire de la cohomologie des espaces de transformation (ou T-espaces). Les notations, quoiqu'indépendantes de celles des autres parties sont cependant compatibles avec elles.

2.1. Nous appelons T-espace la donnée d'un couple (G, X) où G est un groupe d'élément neutre e et X un ensemble, et d'une application $(g, x) \to gx$ de $G \times X$ dans X vérifiant les relations $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2) x$ et $ex = x$. En particulier, si G est un groupe, on notera (G, G) le T-espace associé à l'application $(g_1, g_2) \to g_1 g_2$. Nous appelons sous-T-espace de (G_1, X_1), un couple (G_2, X_2) où G_2 est un sous-groupe de G_1 et X_2 un sous-ensemble de X_1 stable sous l'action de G_2. Un morphisme du T-espace (G_1, X_1) dans le T-espace (G_2, X_2) est la donnée d'un couple (τ', τ) où τ' (resp. τ) est un morphisme du groupe G_1 dans le groupe G_2 (resp. de l'ensemble X_1 dans l'ensemble X_2) tel que sur $G_1 \times X_1$, $\tau(gx) = \tau'(g)\,\tau(x)$. Si (G_3, X_3) est un sous-T-espace de (G_2, X_2), alors $(\tau'^{-1}(G_3), \tau^{-1}(X_3))$ est un sous-T-espace de (G_1, X_1).

2.2. Dans la suite de ce paragraphe on se donne un groupe fixe G d'élément neutre e. On appelle G-module, un groupe abélien sur lequel G agit par automorphismes. Soit (G, X) un T-espace et A un G-module, d'élément neutre 0 (dans les paragraphes suivants, on supposera que G est le groupe symplectique, que l'action de G sur A est triviale et que A est l'un des groupes $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{T}$, ou $\mathbb{Z}$, en notant additivement ou multiplicativement les lois de compositions internes suivant les cas). Pour $p \in \mathbb{N}$, soit $C^p(X, A)$ le G-module des fonctions m sur $X \times \cdots \times X$ ($p+1$ fois) à valeurs dans A telles que

$$m(gx_0, \ldots, gx_p) = gm(x_0, \ldots, x_p), \qquad \forall g \in G,$$

et que $m = 0$ dès que $x_j = x_{j+1}$ $(0 \leqslant j < p)$. On a le complexe de cochaînes

$$C^0(X, A) \xrightarrow{d} C^1(X, A) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} C^p(X, A) \to,$$

dont la différentielle d est définie par

$$dm(x_0, \ldots, x_{p+1}) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant p+1} (-1)^j\, m(x_0, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{p+1}).$$

Soient alors $Z^p(X, A)$, $B^p(X, A)$ les groupes des cocycles et des cobords de dimension p et $H^p(X, A)$ le $p$ième groupe de cohomologie de ce complexe. Rappelons que pour $X = G$, $H^2(G, A)$ est en bijection avec le G-module des classes d'extensions de G par A [10]. Nous allons énoncer des résultats analogues lorsque X est quelconque.

2.3. Nous dirons que le T-espace $(\tilde{G}, \tilde{X})$ est une extension par A du T-espace (G, X), ou de façon équivalente que $(\tilde{G}, \tilde{X}) \in \mathscr{F}(X, A)$, si on a un morphisme de T-espaces (π', π) de $(\tilde{G}, \tilde{X})$ sur (G, X) tel que

(a) π' et π sont surjectifs.

(b) pour tout x de X, le sous-T-espace $(\pi'^{-1}(e), \pi^{-1}(x))$ de $(\tilde{G}, \tilde{X})$ est isomorphe au T-espace (A, A).

Le fait que $(\tilde{G}, \tilde{X})$ appartienne à $\mathscr{F}(X, A)$ implique donc que $\tilde{G}$ est une extension du groupe G par A, au sens habituel. De même, si $\tilde{G}$ est une extension du groupe G par A, alors $(\tilde{G}, \tilde{G}) \in \mathscr{F}(G, A)$. Muni de la topologie discrète, $(\tilde{X}, \pi, X)$ (resp. $(\tilde{G}, \pi', G)$) est un fibré principal d'espace total $\tilde{X}$ (resp. $\tilde{G}$), de base X (resp. G), de groupe structural A et de projection π (resp. π').

On dit que les éléments $(\tilde{G}_j, \tilde{X}_j)$ de $\mathscr{F}(X, A)$ associés aux projections (π'_j, π_j) $(j = 1, 2)$ sur (G, X) sont isomorphes, s'il existe un morphisme de T-espaces (τ', τ) de $(\tilde{G}_1, \tilde{X}_1)$ sur $(\tilde{G}_2, \tilde{X}_2)$ tel que $\pi'_2 \circ \tau' = \pi'_1$ et $\pi_2 \circ \tau = \pi_1$. On note $F(X, A)$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathscr{F}(X, A)$. On peut voir [16] que $F(X, A)$ est de façon naturelle un G-module.

2.4. Nous appelons fonction de Maslov pour un élément $(\tilde{G}, \tilde{X})$ de $\mathscr{F}(X, A)$ une fonction s sur $\tilde{X} \times \tilde{X}$ à valeurs dans A telle que

(a) $s(\tilde{x}_1, u\tilde{x}_2) = u + s(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, $\forall u \in A \subsetneq \tilde{G}$.

(b) $s(\tilde{g}\tilde{x}_1, \tilde{g}\tilde{x}_2) = gs(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, $\forall \tilde{g} \in \tilde{G}$, avec $\pi'(\tilde{g}) = g$.

(c) $s(\tilde{x}, \tilde{x}) = 0$.

Cette terminologie est justifiée par le fait que lorsque $\tilde{G}$ et $\tilde{X}$ sont, respectivement, les revêtements universels du groupe symplectiques et de la grassmannienne des plans lagrangiens réels, il existe une fonction à valeurs entières de ce type, appelée indice de Maslov.

2.5. PROPOSITION. *Soit $(\tilde{G}, \tilde{X}) \in \mathscr{F}(X, A)$, les propriétés qui suivent sont équivalentes*:

(i) *$(\tilde{G}, \tilde{X})$ possède une fonction de Maslov.*

(ii) *Quels que soient les éléments $\tilde{x}_j$ de $\tilde{X}$ $(j = 1, 2)$ et $\tilde{g}$ de $\tilde{G}$, les égalités $\tilde{g}\tilde{x}_j = u_j\tilde{x}_j$ avec $u_j \in A \subsetneq \tilde{G}$, impliquent que $u_1 = u_2$.*

Preuve. Le (i) implique le (ii): choisissons les $\tilde{x}_j$ tels que $s(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 0$. Comme $s(\tilde{g}\tilde{x}_1, \tilde{g}\tilde{x}_2) = (u_2 - u_1) + s(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 0$, on a $u_2 = u_1$.

Réciproquement, si le (ii) est vérifié, on choisit un point arbitraire (x_1, x_2) sur chacune des G-orbites de $X \times X$, puis un point $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ de $\tilde{X} \times \tilde{X}$ tel que $\pi(\tilde{x}_1) = x_1$ et $\pi(\tilde{x}_2) = x_2$. Il existe une fonction de Maslov unique qui vérifie, pour tout $\tilde{g}$ de $\tilde{G}$, $s(\tilde{g}\tilde{x}_1, \tilde{g}\tilde{x}_2) = 0$ pour tous les couples $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ ainsi choisis.

On note $F_0(X, A)$ le sous-ensemble des éléments de $F(X, A)$ qui possèdent un représentant vérifiant les conditions ci-dessus. D'après le (ii), il est clair que $F_0(G, A) = F(G, A)$. L'inclusion de $F_0(X, A)$ dans $F(X, A)$ est stricte en général: on construit facilement des extensions de T-espaces qui ne possèdent pas de fonction de Maslov.

2.6. Soit $\mathscr{E}_0(X,A)$ la classe des triplets $(\tilde{G},\tilde{X},s)$ où s est une fonction de Maslov pour l'élément $(\tilde{G},\tilde{X})$ de $F_0(X,A)$. Deux éléments $(\tilde{G}_j,\tilde{X}_j,s_j)$ $(j=1,2)$ sont dits isomorphes dans $\mathscr{E}_0(X,A)$, s'il existe un isomorphisme de $\mathscr{F}(X,A),(\tau',\tau)$, de l'un sur l'autre, tel que $s_2(\tau(\tilde{x}_1),\tau(\tilde{x}_2))=s_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$. On note $E_0(X,A)$ l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de $\mathscr{E}_0(X,A)$.

2.7. Nous faisons correspondre à un élément $(\tilde{G},\tilde{X},s)$ de $E_0(X,A)$ un élément m de $Z^2(X,A)$ donné par la formule

$$m(x_0,x_1,x_2)=-s(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)+s(\tilde{x}_0,\tilde{x}_2)-s(\tilde{x}_0,\tilde{x}_1) \tag{2.7.1}$$

où les $\tilde{x}_j$ $(j=0,1,2)$ sont choisis tels que $\pi(\tilde{x}_j)=x_j$.

Dans ces conditions, fixons P dans X et $\tilde{P}$ dans $\tilde{X}$ avec $\pi(\tilde{P})=P$. La bijection

$$\tilde{g},\tilde{x}\rightarrow(s(\tilde{P},\tilde{g}\tilde{P}),\pi'(\tilde{g})),(s(\tilde{P},\tilde{x}),\pi(\tilde{x}))$$

de $(\tilde{G},\tilde{X})$ sur $(A\times G,A\times X)$ munit ce dernier d'une structure d'extension de (G,X) par A, notée $(\tilde{G}(P),\tilde{X}(P))$, avec une fonction de Maslov qu'on note $s(P)$, dont les lois sont données par les formules

$$\begin{aligned}(u_1,g_1)(u_2,g_2)&=(u_1+g_1u_2+m(P,g_1P,g_1g_2P),g_1g_2)\\(u_1,g)(u_2,x)&=(u_1+gu_2+m(P,gP,gx),gx)\\s(P)((u_1,x_1),(u_2,x_2))&=u_2-u_1-m(P,x_1,x_2)\end{aligned} \tag{2.7.2}$$

avec $(0,e)$ pour élément neutre de $\tilde{G}(P)$.

Lorsque P varie, ces réalisations de $(\tilde{G},\tilde{X},s)$ sont isomorphes. Précisons les isomorphismes. Soit $\tilde{P}'\in\tilde{X}$ tel que $\pi(\tilde{P}')=P'$ et que $s(\tilde{P}',\tilde{P})=0$, il vient

$$\begin{aligned}s(\tilde{P}',\tilde{g}\tilde{P}')&=s(\tilde{P},\tilde{g}\tilde{P})+m(P',P,gP)-m(P',gP',gP)\\s(\tilde{P}',\tilde{x})&=s(\tilde{P},\tilde{x})+m(P',P,x).\end{aligned}$$

L'isomorphisme de $(\tilde{G}(P),\tilde{X}(P))$ sur $(\tilde{G}(P'),\tilde{X}(P'))$ est donc donné par les formules

$$\begin{aligned}(u,g)&\rightarrow(u+m(P,P',gP)-m(P',gP',gP),g)\\(u,x)&\rightarrow(u+m(P',P,x),x).\end{aligned} \tag{2.7.3}$$

2.8. Réciproquement, on peut faire correspondre à l'élément m de $Z^2(X,A)$ un élément de $E_0(X,A)$. Donnons-nous P dans X, des calculs simples permettent de vérifier que les formules (2.7.2) font de $(A\times G,A\times X,$ $s(P))$ un élément $((\tilde{G}(P),\tilde{X}(P),s(P))$ de $\mathscr{E}_0(X,A)$. Lorsque P varie, les extensions ainsi obtenues ont, d'après les formules (2.7.3), la même image dans $E_0(X, A)$. On a alors la

2.9. Proposition. *Les correspondances* **2.7** et **2.8** *sont inverses l'une de l'autre et définissent un isomorphisme de $E_0(X, A)$ dans $Z^2(X, A)$.*

En quotientant, on vérifie que $F_0(X, A)$ est en bijection avec $H^2(X, A)$. Nous n'utiliserons pas ce résultat. On trouvera dans [16] un exposé rapide concernant une description cohomologique de $F(X, A)$ tout entier. Nous reviendrons sur ces questions dans un article ultérieur.

2.10. Soit $(\tilde{G}, \tilde{X}, s) \in \mathscr{E}_0(X, A)$ et $x \in X$. Notons $x^*(s)$ la fonction de Maslov pour l'extension $(\tilde{G}, \tilde{G})$ de (G, G) définie par $x^*(s)(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 = s(\tilde{g}_1 \tilde{x}, \tilde{g}_2 \tilde{x})$ avec $\pi(\tilde{x}) = x$.

Soit $x^*(m)$ l'élément de $Z^2(G, A)$ associé à $(\tilde{G}, \tilde{G}, x^*(s))$. On a

$$x^*(m)(g_0, g_1, g_2) = m(g_0 x, g_1 x, g_2 x).$$

2.11. Proposition. *Soit $(\tilde{G}, \tilde{X}, s) \in \mathscr{E}_0(X, A_1)$ et $\varphi: A_1 \to A_2$ un morphisme de G-modules. Il existe toujours un élément $(\varphi_*(\tilde{G}), \varphi_*(\tilde{X}), \varphi(s))$ de $\mathscr{E}_0(X, A_2)$, et un morphisme de T-espaces, noté abusivement (φ', φ), de $(\tilde{G}, \tilde{X})$ dans $(\varphi_*(\tilde{G}), \varphi_*(\tilde{X}))$ tels que,*

(1) φ (resp. φ') commute avec les projections de $\tilde{X}$ et de $\varphi_*(\tilde{X})$ (resp. $\tilde{G}$ et $\varphi_*(\tilde{G})$) sur X (resp. G).

(2) $\varphi(u\tilde{x}) = \varphi(u)\, \varphi(\tilde{x})$, $\forall u \in A_1$, $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}$.

(3) Sur $\tilde{X} \times \tilde{X}$, $\varphi(s)(\varphi(\tilde{x}_1), \varphi(\tilde{x}_2)) = \varphi(s(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2))$.

Si deux éléments de $\mathscr{E}_0(X, A_2)$, associés aux morphismes (φ'_1, φ_1) et (φ'_2, φ_2), vérifient ces propriétés, on a un isomorphisme naturel (τ, τ') de l'un sur l'autre caractérisé par les égalités: $\tau'(\varphi'_1(\tilde{g})) = \varphi'_2(\tilde{g})$ sur $\tilde{G}$, et $\tau(\varphi_1(\tilde{x})) = \varphi_2(\tilde{x})$ sur $\tilde{X}$.

Si $m \in Z^2(X, A_1)$ correspond à $(\tilde{G}, \tilde{X}, s)$, l'élément $\varphi(m) \in Z^2(X, A_2))$ correspondant à $(\varphi^*(\tilde{G}), \varphi^*(\tilde{X}), \varphi(s))$ est donné par $\varphi(m)(x_0, x_1, x_2) = \varphi(m(x_0, x_1, x_2))$.

Preuve. Etant donné $P \in X$, on peut, d'après **2.8**, associer à m puis à $\varphi(m)$ une structure d'extension pour $(A_1 \times G, A_1 \times X)$ puis pour $(A_2 \times G, A_2 \times X)$. La première peut être identifiée à $(\tilde{G}, \tilde{X})$ et on choisit $(\varphi^*(\tilde{G}), \varphi^*(\tilde{X}))$ égale à la seconde. Le morphisme (φ', φ) donné par $\varphi'(u, g) = (\varphi(u), g)$ et $\varphi(u, x) = (\varphi(u), x)$ répond aux conditions de la proposition. Ceci prouve l'existence de $(\varphi^*(\tilde{G}), \varphi^*(\tilde{X}), \varphi(s))$. Les autres résultats de Proposition 2.11 s'obtiennent facilement.

Dans le cas particulier où φ est le morphisme $u \to u^p$ (p est un entier et la loi de composition interne de A est notée multiplicativement), on écrira $(\tilde{G}^p, \tilde{X}^p, s^p)$ au lieu de $(\varphi_*(\tilde{G}), \varphi_*(X), \varphi(s))$, m^p au lieu de $\varphi(m)$, et on notera π^p (resp. π'^p) la projection canonique de $\tilde{X}^p$ (resp. $\tilde{G}^p$) sur X (resp. G). Ceci afin de simplifier les notations.

2.12. PROPOSITION. *Soit un élément* $(\tilde{G}, \tilde{X}, s)$ *de* $\mathscr{E}_0(X, A)$ *associé au cocycle m de* $Z^2(X, A)$. *Fixons-nous* $\tilde{P}$ *dans* $\tilde{X}$ *avec* $\pi(\tilde{P}) = P$. *L'ensemble des morphismes de T-espaces* (ι', ι) *de* (G, X) *dans* $(\tilde{G}, \tilde{X})$ *tels que* $\pi' \circ \iota' = \mathrm{Id}_G$, $\pi \circ \iota = \mathrm{Id}_X$ *et* $\iota(P) = \tilde{P}$ *est en bijection avec le sous-ensemble* (*vide en général*) *des fonctions n de* $C^1(X, A)$ *telles que* $m = dn$.

Preuve. On fait correspondre à (ι', ι), la fonction n de $C^1(X, A)$ donnée par $n(x_1, x_2) = -s(\iota(x_1), \iota(x_2))$; on a bien $m = dn$. Réciproquement, si n est un élément de $C^1(X, A)$ tel que $m = dn$, on voit que (G, X) est isomorphe au sous-T-espace des éléments de $(\tilde{G}(P), \tilde{X}(P))$ de la forme $(-n(P, gP), g)$, $(-n(P, x), x)$.

2.13. Soit x dans X, on peut, d'après la Proposition 2.12, faire correspondre à tout homomorphisme ι' du groupe G dans le groupe $\tilde{G}$ tel que $\pi' \circ \iota' = \mathrm{Id}_G$, une fonction $n(x)$ de $C^1(G, A)$ telle que $x^*(m) = dn(x)$. Cette correspondance et une bijection. Soient $x_1, x_2 \in X$, on a sur $G \times G$,

$$\begin{aligned}(n(x_2) - n(x_1))(g_1, g_2) = m(&g_1x_1, g_1x_2, g_2x_2)\\ &- m(g_1x_1, g_2x_1, g_2x_2).\end{aligned}$$

2.14. Reprenons le contexte et les notations de la Proposition 2.11. On peut associer à tout élément n de $C^1(X, A_2)$ tel que $\varphi(m) = dn$, une injection (ι', ι) de (G, X) dans $(\varphi_*(\tilde{G}), \varphi_*(\tilde{X}))$. Posant $(\varphi^{-1}(\iota'(G)), \varphi^{-1}(\iota(X)) = (\hat{G}, \hat{X})$, on obtient un sous-$T$-espace de $(\tilde{G}, \tilde{X})$ qui est une extension de (G, X) par $\operatorname{Ker} \varphi$. Etant donné P dans X, $(\hat{G}, \hat{X})$ est isomorphe au sous-T-espace $(\hat{G}(P), \hat{X}(P))$ de $(\tilde{G}(P), \tilde{X}(P))$ défini par

$$\begin{aligned}\hat{G}(P) &= \{(u, g) \mid u \in A_1, \varphi(u) = -n(P, gP)\}\\ \hat{X}(P) &= \{(u, x) \mid u \in A_1, \varphi(u) = -n(P, x)\}.\end{aligned} \tag{2.14.1}$$

2.15. Si G est égal à son groupe dérivé et s'il agit transitivement sur X, on vérifie que tout élément m de $B^2(X, A)$ s'écrit de façon unique sour la forme dn.

3. COUPLAGE DE SPINEURS SYMPLECTIQUES PURS

3.1. Rappelons la construction de la représentation projective de Shale–Weil du groupe symplectique G ([22 et 25], voir aussi [13]). Comme dans **1.5**, on se donne une représentation unitaire, irréductible $(\mathscr{H}, \rho, (\ |\ ))$ du groupe de Heisenberg N telle que $\rho(\exp tc) = e^{-i\lambda t}\,\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$. Pour tout g de G, la représentation $n \to \rho(gn)$ de N est équivalente à ρ. Soit $\tilde{G}_1$ (resp. $\tilde{G}_2$) le groupe des automorphismes continus (resp. unitaires) $\tilde{g}$ de $\mathscr{H}$ tels que

$$\exists g \in G, \qquad \tilde{g}\rho(n)\,\tilde{g}^{-1} = \rho(gn), \quad \forall n \in N.$$

On pose alors $\pi_1'(\tilde{g}) = g$ (resp. $\pi_2'(\tilde{g}) = g$). On voit que $(\tilde{G}_1, \pi_1', G)$ (resp. $(\tilde{G}_2, \pi_2', G)$) est une extension (centrale) du groupe G par le groupe abélien $\mathbb{C}^*$ (resp. le tore $\mathbb{T}$). De plus $\tilde{G}_2 = \tilde{G}_1/\mathbb{R}_+^*$. Toute section de G dans $\tilde{G}_2$ donne la représentation projective de Shale–Weil de G.

Soit $x \in X$. Les opérateurs de la forme $R = u\mathscr{F}_{x', gx'}D(g)$ (où $u \in \mathbb{C}^*$, $x' \in X'$ se projette en x sur X et $g \in G$) forment un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathscr{H}_x)$ isomorphe à $\tilde{G}_1$. En effet, d'après **1.7**, on a $R\rho_x(n)R^{-1} = \rho_x(gn)$. On trouvera dans [13] des précisions sur les opérateurs ainsi construits lorsque x est réel. Supposons maintenant x totalement complexe. Définissant $\mathscr{P}_x$ comme dans le Lemme 1.9, on a sur $\mathscr{H}_x$,

$$R\Phi(n) = u(\mathscr{P}_x D(g)\,\Phi)(n) = u\int_{N/C} \Phi(h)\,K_x(g(h^{-1})\,n)\,\delta\dot{h}.$$

Nous reviendrons sur ces questions dans la Proposition 5.6.

3.2. Dans le contexte de **1.6**, soit j l'injection antilinéaire canonique de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}^{-\infty}$ donnée par $j(\Phi_1)\,(\Phi_2) = (\Phi_2 \mid \Phi_1)$ pour $\Phi_2 \in \mathscr{H}^{\infty}$. Sur $\mathscr{H}^{\infty}$, on a $j\rho^{\infty}(Y) = \rho^{-\infty}(\bar{Y})\,j$, pour $Y \in \mathfrak{n}^{\mathbb{C}}$. On définit une action $(\tilde{g}, \Psi) \to \tilde{g} \circ \Psi$ de $\tilde{G}_1$ sur $\mathscr{H}^{-\infty}$ telle que sur $\mathscr{H}$, $\tilde{g} \circ j = j\tilde{g}$, en posant $(\tilde{g} \circ \Psi)(\Phi) = \Psi(\eta(\tilde{g})^2\,\tilde{g}^{-1}\Phi)$, $\forall \Psi \in \mathscr{H}^{-\infty}$, $\forall \Phi \in \mathscr{H}^{\infty}$ où $\eta(\tilde{g})$ est l'unique élément de $\mathbb{R}_+^*$ tel que $\eta(\tilde{g})^{-1}\,\tilde{g} \in \tilde{G}_2$.

3.3. PROPOSITION. (1) *On peut faire correspondre à tout élément x de X (resp. X^0), une droite vectorielle d'éléments $\tilde{x}$ de $\mathscr{H}^{-\infty}$ (resp. $\tilde{x}'$ de $\mathscr{H}^{\infty}$) tels que*

$$\rho^{-\infty}(\bar{Y})\,\tilde{x} = 0 \;(\textit{resp.}\; \rho^{\infty}(Y)\,\tilde{x}' = 0), \qquad \forall Y \in x.$$

Cette correspondance est injective.

(2) *Soit $\tilde{X}_1$ (resp. $\tilde{X}_1^0$) l'ensemble de ces droites vectorielles privées de zéro et π_1 la surjection canonique de $\tilde{X}_1$ sur X telle que $\pi_1(\tilde{x}) = x$. Alors $j(\tilde{X}_1^0) = \pi_1^{-1}(X^0)$.*

Preuve. Dans le (1), on reprend la méthode utilisée par Kostant dans le cas où x est réel [11, 5.3], on identifie $\mathscr{H}$ à l'espace de Schrödinger $L^2(\mathbb{R}^r)$; on est ramené à résoudre une équation différentielle du premier ordre, dont les solutions, uniques à un facteur multiplicatif près, font partie de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ si et seulement si $x \in X^0$. Le (2) résulte du (1).

Il est clair que $(\tilde{X}_1, \pi_1, X)$ (resp. $(\tilde{X}_1^0, \pi_1, X^0)$) est un fibré principal de groupe structural $\mathbb{C}^*$.

Nous appelons les éléments de $\tilde{X}_1$ *spineurs symplectiques purs*. Supposons momentanément que $(\mathscr{H}, \rho)$ est la représentation spinorielle de l'algèbre de Clifford N d'un espace vectoriel V muni d'une forme quadratique neutre Q. On sait (voir [5 et 15]) que les spineurs purs sont les éléments $\tilde{x}$ de $\mathscr{H}$ tels que

$$\rho(Y)\tilde{x} = 0, \qquad \forall Y \in x,$$

où x est un sous-espace isotrope maximal de (V, Q). Ceci justifie notre terminologie. On démontre sans peine la

3.4. Proposition. *Le sous-espace $\tilde{X}_1$ (resp. $\tilde{X}_1^0$) est stable par l'action de $\tilde{G}_1$ sur $\mathscr{H}^{-\infty}$ (resp. $\mathscr{H}^{\infty}$), de telle sorte que $(\tilde{G}_1, \tilde{X}_1)$ (resp. $(\tilde{G}_1, \tilde{X}_1^0)$ muni des projections (π_1', π_1) est une extension de (G, X) (resp. (G, X^0)) par $\mathbb{C}^*$. On a une fonction de Maslov s_1 pour $(\tilde{G}_1, \tilde{X}_1^0)$ donnée par*

$$s_1(\tilde{x}_1', \tilde{x}_2') = (\tilde{x}_2' \mid \tilde{x}_1')/(\tilde{x}_1' \mid \tilde{x}_1') \qquad \textit{sur} \quad \tilde{X}_1^0 \times \tilde{X}_1^0.$$

Bien que les éléments de $\tilde{X}_1$ soient en général des vecteurs-distributions pour lesquels le produit scalaire n'est pas défini, nous allons construire une fonction naturelle s_2' sur $\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_1$ à valeurs dans $\mathbb{T}$, appelée couplage, possédant certaines propriétés d'invariance et telle que

$$s_2'(j(x_1'), j(x_2')) = \varepsilon(x_2' \mid x_1') \qquad \text{sur} \quad \tilde{X}_1^0 \times \tilde{X}_1^0$$

où ε est l'homomorphisme de groupes $u \to u/|u|$ de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{T}$. Nous utiliserons les résultats suivants.

3.5. Proposition. *Soient $O \in X^0$ (comme dans* **1.1**),

(1) *Soit $x \in X$. La fonction $K_{O,x}$ de* (1.4.1) *est un élément de $\mathscr{H}_x^{\infty}$ qui est un multiple de $\mathscr{F}_{x,O} K_O$.*

(2) *Soit $x \in X^0$. La fonction $K_{x,O}$ est un élément de $\mathscr{H}_O^{\infty}$ tel que $\rho_O^{\infty}(Y) K_{x,O} = 0$, $\forall Y \in x$.*

Preuve. On sait que $K_O \in \mathscr{H}_O^{\infty}$, donc $\mathscr{F}_{x,O} K_O \in \mathscr{H}_x^{\infty}$. On a $\mathscr{L}(Y) \mathscr{F}_{x,O} K_O = 0$, $\forall Y \in O$ et $\mathscr{R}(\bar{Y}) \mathscr{F}_{x,O} K_O = 0$, $\forall Y \in x$, d'après **1.6**. Cette fonction est donc un multiple de $K_{O,x}$ d'après la Proposition 1.4. Ceci prouve le (1). On obtient le (2) de façon identique.

Le groupe $\tilde{G}_1$ agit sur chacun des espaces $\mathscr{H}_x$ par la formule $\tilde{g}$, $\Phi \to \tilde{g}_x \Phi = \mathscr{F}_x \tilde{g} \mathscr{F}_x^{-1} \Phi$ où $\mathscr{F}_x$ est un opérateur d'entrelacement de $(\mathscr{H}, \rho)$

dans $(\mathscr{H}_x, \rho_x)$. Nous donnons maintenant une réalisation explicite du fibré des spineurs symplectiques purs.

3.6. PROPOSITION. *Soit $(\tilde{X}_1(O), \pi_1(O), X)$ le fibré principal de base X où $\tilde{X}_1(O) = \bigcup_{u\in\mathbf{C}^*, x\in X} uK_{O,x}$ et $\pi_1(O)$ est la projection naturelle $uK_{O,x} \to x$ de $\tilde{X}_1(O)$ sur X. Soit $\mathscr{F}_O$ un opérateur d'entrelacement de $(\mathscr{H}, \rho)$ dans $(\mathscr{H}_O, \rho_O)$. On a un isomorphisme de fibrés naturel, $\tau(O)$, de $\tilde{X}_1$ sur $\tilde{X}_1(O)$, unique à un facteur multiplicatif près dépendant du choix de $\mathscr{F}_O$, tel que $\pi_1(O)\,\tau(O) = \pi_1$ et que, pour $\tilde{x} \in \tilde{X}_1$,*

$$\tilde{x}(\Phi) = \int_{N/C} (\tau(O)\,\tilde{x})(n)(\mathscr{F}_O\,\Phi)(n^{-1})\,\delta \dot{n}, \qquad \forall \Phi \in \mathscr{H}^\infty.$$

On a alors pour $\tilde{g} \in \tilde{G}_1$,

$$\tau(O)(\tilde{g} \circ \tilde{x}) = \eta(\tilde{g})^2\, D(g)\,\tilde{g}_x^{-1}\,\tau(O)\,\tilde{x} \qquad \text{où} \qquad x = \pi_1(\tilde{x}).$$

Preuve. Nous utilisons les

3.7. LEMME. *Soit $x \in X$. On a une application linéaire $\mathscr{E}_x$ de $\mathscr{H}_x$ sur la droite vectorielle $\pi_1^{-1}(x) \cup \{0\}$ donnée par*

$$\mathscr{E}_x(\Phi_1)(\Phi_2) = \int_{N/C} \Phi_1(n)(\mathscr{F}_O\,\Phi_2)(n^{-1})\,\delta\dot{n}, \qquad \forall \Phi_1 \in \mathscr{H}_x, \quad \forall \Phi_2 \in \mathscr{H}^\infty.$$

De plus, Ker $\mathscr{E}_x$ *est l'orthogonal de $K_{O,x}$ dans $\mathscr{H}_x$.*

Preuve du Lemme 3.7. Utilisant **1.6**, on voit que $\mathscr{E}_x(\Phi_1) \in \mathscr{H}^{-\infty}$. On a pour $Y \in x$,

$$\begin{aligned}[\rho^{-\infty}(\bar{Y})\,\mathscr{E}_x(\Phi_1)](\Phi_2) &= \mathscr{E}_x(\Phi_1)(\rho^\infty(-\bar{Y})\,\Phi_2)\\ &= \mathscr{E}_x(\Phi_1)(\mathscr{L}(-\bar{Y})\,\Phi_2) = \mathscr{E}_x(\mathscr{R}(\bar{Y})\,\Phi_1)(\Phi_2) = 0.\end{aligned}$$

On en déduit le début du Lemme 3.7. Si maintenant $\Phi_1 \in \operatorname{Ker} \mathscr{E}_x$, on a $(\Phi_1 \mid K_{O,x}) = \mathscr{E}_x(\Phi_1)(K_{x,O}) = 0$ du fait que $\overline{K_{O,x}(n^{-1})} = K_{x,O}$. Ceci prouve que $\operatorname{Ker} \mathscr{E}_x \subseteq (K_{O,x})^\perp$, comme $\operatorname{Ker} \mathscr{E}_x$ est un hyperplan, on a l'égalité. D'où le Lemme 3.7.

3.8. LEMME. *Le groupe $\tilde{G}_1$ agit sur $\bigcup_{x\in X} \mathscr{H}_x$ par la formule $\tilde{g}$, $\Phi \to L(\tilde{g})\,\Phi = \eta(\tilde{g})^2\, D(g)\,\tilde{g}_x^{-1}\Phi$ pour $\Phi \in \mathscr{H}_x$. Soit $\mathscr{E}$ l'application de $\bigcup_{x\in X} \mathscr{H}_x$ dans $\tilde{X}_1 \cup \{0\}$ telle que $\mathscr{E}_{|\mathscr{H}_x} = \mathscr{E}_x$, on a*

$$\mathscr{E}(L(\tilde{g})\,\Phi) = \tilde{g} \circ \mathscr{E}(\Phi).$$

Preuve de Lemme 3.8. Du fait que $D(g)\,\tilde{g}_x^{-1}$ est un opérateur d'entrelacement de $(\mathscr{H}_x, \rho_x)$ dans $(\mathscr{H}_{gx}, \rho_{gx})$ on déduit facilement que L définit bien une action de $\tilde{G}_1$. Nous prouvons maintenant que la forme bilinéaire bicontinue $\omega(g)$ sur $\mathscr{H}_x \times \mathscr{H}_O^\infty$, donnée par

$$\omega(g)(\Phi_1, \Phi_2) = \int_{N/C} (D(g)\,\tilde{g}_x^{-1}\,\Phi_1)(n)(\tilde{g}_O\,\Phi_2)(n^{-1})\,\delta\dot{n}$$

où $\tilde{g}$ est tel que $\pi_1(\tilde{g}) = g$, ne dépend pas de g dans G. Pour cela, on remarque que si on fixe Φ_1 (resp. Φ_2), la forme $\Phi_2 \to \omega(g)(\Phi_1, \Phi_2)$ (resp. $\Phi_1 \to \omega(g)(\Phi_1, \Phi_2)$) sur $\mathscr{H}_O^\infty$ (resp. $\mathscr{H}_x^\infty$) est un spineur symplectique pur de $\mathscr{H}_O^{-\infty}$ (resp. $\mathscr{H}_x^{-\infty}$) qui se projette en x (resp. en O). Par conséquent $\omega(g) = u(g, x, O)\,\omega(e)$. Choisissant par exemple $\Phi_2 = K_O$, on constate que $u(g, x, O) = u(g, O, O) = u(g)$ ne dépend ni de x, ni de O. De plus, $g \to u(g)$ est un caractère nécessairement trivial de G. D'où le Lemme 3.8.

Comme $D(g)\,\tilde{g}_x^{-1}\,K_{O,x}$ est un multiple de $K_{O,gx}$, on voit que $\tilde{X}_1(O)$ est stable par l'action L de $\tilde{G}_1$ sur $\bigcup_{x \in X} \mathscr{H}_x$. La restriction de $\mathscr{E}$ à $\tilde{X}_1(O)$ met celui-ci en bijection avec $\tilde{X}_1$. On pose alors $\tau(O) = (\mathscr{E}_{|\tilde{X}_1(O)})^{-1}$, ce qui nous donne l'isomorphisme attendu et achève la preuve de la Proposition 3.6.

Une démonstration identique à celle du Lemme 3.8 donne la

3.9. Proposition. *Soient $O' \in X^0$ et $g \in G$ tels que $gO = O'$. Il existe un élément $\tilde{g}$ de $\tilde{G}_1$ se projettant sur g tel que, sur $\tilde{X}_1$,*

$$\tau(O')\,\tilde{x} = \tilde{g}_x \tau(O)\,\tilde{x} \qquad \textit{avec} \quad x = \pi_1(\tilde{x}).$$

3.10. Nous pouvons maintenant construire la fonction s_2'. Soient $\tilde{x}_j$ $(j = 1, 2)$, deux éléments de $\tilde{X}_1$ tels que $\pi_1(\tilde{x}_j) = x_j$. Les éléments $\tau(O)\,\tilde{x}_j$, appartiennent à $\mathscr{H}_j^\infty$. Posons

$$s_2'(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \varepsilon(\tau(O)\,\tilde{x}_1, \mathscr{F}_{12}\tau(O)\,\tilde{x}_2)_1, \tag{3.10.1}$$

où $\mathscr{F}_{12}$ est un opérateur d'entrelacement canonique de $(\mathscr{H}_1, \rho_1)$ dans $(\mathscr{H}_2, \rho_2)$ (voir Théorème 1.8), défini à un scalaire de $\mathbb{R}_+^*$ près qui dépend du choix des mesures et qui est sans importance pour le résultat final. D'après la Proposition 3.9, le choix de O dans la définition de s_2' est aussi sans importance.

Pour $u \in \mathbb{C}^*$, où $\mathbb{C}^*$ est considéré comme un sous-groupe de $\tilde{G}_1$, on a

$$\tau(O)\,u \circ \tilde{x}_2 = u^{-1}\tau(O)\,\tilde{x}_2, \qquad \text{sur} \quad \tilde{X}_1.$$

Pour $\tilde{x}_2 = j\tilde{x}_2' \in j(\tilde{X}_1^0)$, il vient

$$[\tau(O)(j\tilde{x}_2')](n) = \overline{(\mathscr{F}_O\tilde{x}_2')(n^{-1})}.$$

Dans ce cas, $s_2'(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \varepsilon\tilde{x}_1(\tilde{x}_2')$. D'où le

3.11. THÉORÈME. *La fonction* s_2' *sur* $\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_1$ *vérifie les propriétés suivantes*

(a) $s_2'(\tilde{g} \circ \tilde{x}_1, \tilde{g} \circ \tilde{x}_2) = s_2'(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, $\forall \tilde{g} \in \tilde{G}_1$.

(b) $s_2'(\tilde{x}_1, u \circ \tilde{x}_2) = \varepsilon(u)\, s_2'(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, $\forall u \in \mathbb{C}^*$.

(c) *Si* $\tilde{x}_2 = j\tilde{x}_2'$, $s_2'(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \varepsilon \tilde{x}_1(\tilde{x}_2')$. *Si, de plus* $\tilde{x}_1 = j\tilde{x}_1'$, $s_2'(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \varepsilon(\tilde{x}_2' \mid \tilde{x}_1')$ (où $\tilde{x}_1', \tilde{x}_2' \in \mathscr{H}^\infty$).

Reprenant les notations de la Proposition 2.11, on a $\tilde{G}_2 = \varepsilon_*(\tilde{G}_1)$, on pose $\tilde{X}_2 = \varepsilon_*(\tilde{X}_1)$. On note encore ε, la surjection canonique de $\tilde{X}_1$ sur $\tilde{X}_2$. On définit la fonction de Maslov s_2 pour $(\tilde{G}_2, \tilde{X}_2)$ par

$$s_2(\varepsilon(\tilde{x}_1), \varepsilon(\tilde{x}_2)) = \varepsilon s_2'(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \qquad \forall \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}_1.$$

3.12. PROPOSITION. $(\tilde{G}_2, \tilde{X}_2, s_2) \in \mathscr{E}_0(X, \mathbb{T})$.

4. INDICE DE MASLOV GÉNÉRALISÉ

D'après **2.7** on peut associer à l'extension $(\tilde{G}_1, \tilde{X}_1^0, s_1)$ (resp. $(\tilde{G}_2, \tilde{X}_2, s_2)$) de (G, X^0) (resp. (G, X)) par $\mathbb{C}^*$ (resp. $\mathbb{T}$), un élément m_1 (resp. m_2) de $Z^2(X^0, \mathbb{C}^*)$ (resp. $Z^2(X, \mathbb{T})$) que nous nous proposons de calculer. Nous adoptons les conventions suivantes: si a est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel W, on note $\operatorname{Det} a$, le produit des valeurs propres non nulles de a affectées de leur multiplicité. Si $\operatorname{Ker} a = \{0\}$, on a donc $\operatorname{Det} a = \det a$. Si maintenant y est un sous-espace vectoriel totalement isotrope de V, on pose

$$(X \times X)(y) = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 \cap x_2 \cap V = y\}.$$

Lorsque $y = \{0\}$, on a $X^0 \times X^0 \subset (X \times X)(0) \subset X \times X$, par conséquent $(X \times X)(0)$ muni de la topologie trace de celle de $X \times X$ est simplement connexe. En se plaçant dans l'espace symplectique $y^\perp/y$, on obtient un résultat analogue lorsque y est quelconque. Comme dans la Section 1, on associe à x_j $(j = 1, 2)$ le sous-groupe D_j puis, étant donné $O \in X^0$, l'opérateur Z_j; on convient de noter F_j l'élément K_{O,x_j} de $\mathscr{H}_j$.

4.1. PROPOSITION. (1) *Soit* $(x_1, x_2) \in (X \times X)(0)$, *on a*

$$\int_{N/C} F_1 \overline{F_2}(n)\, \delta \dot{n} = \det{}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{Id}_O - Z_1 \overline{Z_2}),$$

(2) *Soient* x_1, $x_2 \in X$, *on a*

$$\varepsilon \left(\int_{N/D_1 \cap D_2} F_1 \overline{F_2}(n)\, d\dot{n} \right) = \varepsilon \operatorname{Det}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{Id}_O - Z_1 \overline{Z_2}),$$

où $d\dot{n}$ est une mesure N-invariante, et ε est comme dans la Section 3. Les puissances $-\frac{1}{2}$ sont déterminées de telle sorte que les fonctions correspondantes sont égales à 1 dans $\mathbb{C}^*$ (resp. $\mathbb{T}$) lorsque $x_1 = x_2$, et sont continues sur $(X \times X)(0)$ (resp. $(X \times X)(y)$ lorsque $y = x_1 \cap x_2 \cap V$ reste fixe).

Preuve. Soit $x \in X$, nous posons $T_x = \alpha^{-1} Z_x \bar{\alpha}$, où α et Z_x ont été définis en **1.1**. On note $T_j = T_{x_j}$, c'est un opérateur antilinéaire sur (V, J). On a d'après (1.4.1)

$$F_1 \overline{F_2}(\exp v) = e^{-(\lambda/2)[S(v,v) - (1/2)H(v,T_1 v) - (1/2)\overline{H(v,T_2 v)}]}.$$

On vérifie que pour $(x_1, x_2) \in (X \times X)(0)$, cette fonction est intégrable sur V. On calcule aisément l'intégrale lorsque $x_1 = x_2$. On en déduit le (1) de la Proposition 4.1 par prolongement analytique. Pour prouver le (2), on utilise le

4.2. Lemme. (1) *Soit* $x \in X$, *on a* $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_V - T) = x \cap V$ *et* $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_V + T) = J(x \cap V)$.

(2) *Soient* $x_1, x_2 \in X$, *on a* $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_V - T_1 T_2) = (x_1 \cap x_2 \cap V) \oplus J(x_1 \cap x_2 \cap V)$.

Preuve du Lemme 4.2. Prouvons le (2) par exemple, on a

$$\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_V - T_1 T_2) = \alpha^{-1} \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_O - Z_1 \overline{Z_2}) = \alpha^{-1} \alpha^{\mathbb{C}}(x_1 \cap \overline{x_2}).$$

D'après la Proposition 1.4, $x_1 \cap \bar{x}_2 = (x_1 \cap x_2 \cap V)^{\mathbb{C}}$. On déduit alors le (2) du fait que $\alpha^{-1} \alpha^{\mathbb{C}} i = J \alpha^{-1} \alpha^{\mathbb{C}}$.

Remarquant que T_1 et T_2 coïncident avec l'identité sur $x_1 \cap x_2 \cap V$, posant $V' = ((x_1 \cap x_2 \cap V) \oplus J(x_1 \cap x_2 \cap V))^{\perp}$, il vient

$$\varepsilon \int_{N/D_1 \cap D_2} F_1 \overline{F_2}(n)\, d\dot{n} = \varepsilon \int_{v'' \in J(x_1 \cap x_2 \cap V)} e^{-\lambda S(v'', v'')}$$
$$\times \int_{v' \in V'} e^{-(\lambda/2)[S(v',v') - 1/2 H(v', T_1 v') - (1/2)\overline{H(v', T_2 v')}]}\, dv'\, dv$$

le (2) de la Proposition 4.1 se déduit alors de son (1).

4.3. Nous pouvons maintenant calculer le 2-cocycle m_1 (resp. m_2). D'après (2.7.1) on a sur $X^0 \times X^0 \times X^0$ (resp. $X \times X \times X$),

$$m_1(x_0, x_1, x_2) = s_1^{-1}(\tilde{x}_1', \tilde{x}_2')\, s_1(\tilde{x}_0', \tilde{x}_2')\, s_1^{-1}(\tilde{x}_0', \tilde{x}_1')$$
$$(\text{resp. } m_2(x_0, x_1, x_2) = s_2^{-1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\, s_2(\tilde{x}_0, \tilde{x}_2)\, s_2^{-1}(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1))$$

$\tilde{x}'_k \in \tilde{X}_1^0$ (resp. $\tilde{x}_k \in \tilde{X}_2$) avec $\pi_1(\tilde{x}'_k) = x_k$ (resp. $\pi_2(\tilde{x}_k) = x_k$) ($k = 0, 1, 2$); où s_1 (resp. s_2) a été défini dans la Proposition 3.4 (resp. Proposition 3.12). Choisissons les $\tilde{x}'_k$ (resp. $\tilde{x}_k$) tels que $\mathscr{F}_O \tilde{x}'_k = \check{F}_k$, avec $\check{F}_k(n) = \overline{F_k(n^{-1})}$, (resp. $\tau(O)\, \tilde{x}_k = F_k$) où $\mathscr{F}_O$ (resp. $\tau(O)$) a été défini dans la Proposition 3.6. On pose

$$\begin{aligned}\chi_1^{-1}(x_1, x_2) &= s_1(\tilde{x}_1', \tilde{x}_2')\\ &= \int_{N/C} F_1 \overline{F_2}(n)\, d\dot{n} \Big/ \int_{N/C} F_1 \overline{F_1}(n)\, \delta\dot{n}\end{aligned}$$

(resp. $\chi_2^{-1}(x_1, x_2) = s_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \varepsilon \int_{N/D_1 \cap D_2} F_1 \overline{F_2}(n)\, d\dot{n}$).

4.4. PROPOSITION. *L'élément m_1 de $Z^2(X^0, \mathbb{C}^*)$ (resp. m_2 de $Z^2(X, \mathbb{T})$) associé à $(\tilde{G}_1, \tilde{X}_1^0, s_1)$ resp. $(\tilde{G}_2, \tilde{X}_2, s_2)$ est donné par la formule*

$$m_j(x_0, x_1, x_2) = \chi_j(x_1, x_2)\, \chi_j^{-1}(x_0, x_2)\, \chi_j(x_0, x_1)$$

pour $j = 1$ (resp. 2), avec

$$\begin{aligned}\chi_1(x_1, x_2) &= \det^{\frac{1}{2}}(\mathrm{Id}_O - Z_1 \overline{Z_2})/\det^{\frac{1}{2}}(\mathrm{Id}_O - Z_1 \overline{Z_1})\\ \chi_2(x_1, x_2) &= \varepsilon\, \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}}(\mathrm{Id}_O - Z_1 \overline{Z_2}).\end{aligned}$$

4.5. PROPOSITION. *Soient pour j, $k = 0, 1, 2$, trois éléments $(x_j, d\dot{n}_j)$ de l'espace X' défini en* **1.5** *auxquels on associe les opérateurs d'entrelacement canoniques $\mathscr{F}_{jk}$ du Théorème 1.8. Alors*

$$\mathscr{F}_{02} \mathscr{F}_{21} \mathscr{F}_{10} = m_2^{-1}(x_0, x_1, x_2)\, \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_0}.$$

Preuve. Dans la formule donnant m_2 en fonction de s_2, choisissons les $\tilde{x}_j$ de telle sorte que $\tau(O)\, \tilde{x}_1 = \mathscr{F}_{10} \tau(O)\, \tilde{x}_0$ et $\tau(O)\, \tilde{x}_2 = \mathscr{F}_{21} \mathscr{F}_{10} \tau(O)\, \tilde{x}_0$, utilisant le (2) de Théorème 1.8 et (3.10.1), on obtient

$$m_2(x_0, x_1, x_2) = \varepsilon(\tau(O)\, \tilde{x}_0, \mathscr{F}_{02} \mathscr{F}_{21} \mathscr{F}_{10} \tau(O)\, \tilde{x}_0)_0,$$

d'où le résultat.

4.6. Notre but dans ce qui suit est de construire en utilisant un argument de connexité, un 2-cocycle à valeurs réelles qui relève m_2 sur $X \times X \times X$.

Soit y un sous-espace isotrope de V. On a vu que la restriction au domaine simplement connexe $(X \times X)(y)$ de la fonction $(x_1, x_2) \to \varepsilon\, \mathrm{Det}(\mathrm{Id}_O - Z_1 \bar{Z}_2)$ est continue et égale à 1 lorsque $x_1 = x_2$. Soit χ la fonction continue sur $(X \times X)(y)$, à valeurs réelles, telle que

(i) $\chi(x, x) = 0$

(ii) $e^{i(\pi/2)\chi(x_1,x_2)} = \chi_2^2(x_1, x_2) = \varepsilon \operatorname{Det}(\mathrm{Id}_O - Z_1 \bar{Z}_2)$.

En faisant varier y, on obtient ainsi une fonction alternée, encore notée χ, sur $X \times X$ tout entier. Sur $X \times X \times X$, nous posons

$$m(x_0, x_1, x_2) = \chi(x_1, x_2) - \chi(x_0, x_2) + \chi(x_0, x_1).$$

Dans le résultat suivant φ dénote le morphisme de groupes de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{T}$ donné par $\varphi(u) = e^{i(\pi/4)u}$.

4.7. THÉORÈME. *Il existe une fonction réelle unique m sur* $X \times X \times X$ *qui vérifie les propriétés suivantes*:

(a) *sur* $X \times X \times X \times X$ *et pour* $g \in G$, *on a*

$$m(x_1, x_2, x_3) - m(x_0, x_2, x_3) + m(x_0, x_1, x_3) - m(x_0, x_1, x_2) = 0,$$
$$m(gx_0, gx_1, gx_2) = m(x_0, x_1, x_2).$$

De plus m est alternée. En résumé (*notation de* **2.2**), *m est un élément alterné de* $Z^2(X, \mathbb{R})$.

(b) *On a* $e^{i(\pi/4)m(x_0,x_1,x_2)} = m_2(x_0, x_1, x_2)$. *Autrement dit* (*notation de la Proposition* 2.11), $\varphi(m) = m_2$.

(c) *La restriction de m à toute partie de* $X \times X \times X$ *sur laquelle les dimensions des* $x_j \cap x_k \cap V$ (*où* j, $k \in \{0, 1, 2\}$ *avec* $j \neq k$) *sont constantes, est continue.*

Preuve. Nous prouvons le (c). Le sous-groupe de stabilité U dans G de l'élément O de X^0, isomorphe au groupe unitaire, agit transitivement sur les sous-espaces isotropes y de V de dimension donnée p. De plus, il laisse invariante la fonction χ_2, puisque pour $g \in U$, on a

$$\chi_2(gx_1, gx_2) = \varepsilon \int_{N/gD_1 \cap gD_2} D(g) F_1 \overline{D(g) F_2}(\dot{n})\, d\dot{n} = \chi_2(x_1, x_2).$$

Par relèvement, cela entraîne que la fonction χ est également invariante par U. Comme la restriction de χ à $(X \times X)(y)$ est continue, on en déduit que χ est continue sur toute partie de $X \times X$ telle que $\dim(x_1 \cap x_2 \cap V) = C^{\text{ste}}$. Cela implique le (c).

La fonction $g \to m(gx_0, gx_1, gx_2)$ est donc continue sur G et d'après le (b), qui est évident, elle est constante. Les autres propriétés du Théorème 4.7 sont faciles à prouver.

4.8. PROPOSITION (Calcul pratique du 2-cocycle m). *On a* $m(x_0, x_1, x_2) = \chi(x_1, x_2) - \chi(x_0, x_2) + \chi(x_0, x_1)$ *avec*

$$\chi(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} \sum_k p_k \theta_k$$

où p_k *et* θ_k *sont, respectivement, la multiplicité et l'argument compris entre* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$ *de la kième valeur propre non nulle de l'opérateur* $\mathrm{Id}_O - Z_1 \overline{Z_2}$ *de* $\mathrm{End}(O)$. *En effet, ces valeurs propres ont une partie réelle strictement positive.*

Preuve. Du fait que $iB(\bar{Z}_1 Z_2 \bar{v}, Z_1 \bar{Z}_2 v) \leqslant iB(\bar{v}, v)$, les valeurs propres de $(\mathrm{Id}_O - Z_1 \bar{Z}_2)$ sont situées à l'intérieur d'un cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1, d'où la dernière remarque de la proposition. La fonction χ ainsi définie vérifie bien les propriétés (i) et (ii) de **4.6**, d'où la Proposition 4.8.

4.9. Nous appelons la fonction m, *indice de Maslov généralisé*. Justifions cette terminologie. Soit Λ comme dans **1.1** et μ l'indice de Maslov ordinaire défini par Leray–Souriau–Kashiwara (voir [13], ainsi que [23] et [12]). Rappelons que sur $\Lambda \times \Lambda \times \Lambda$, $\mu(l_0, l_1, l_2)$ est la signature de la forme quadratique Q sur $l_0 \oplus l_1 \oplus l_2$, définie par

$$Q(v_0 \oplus v_1 \oplus v_2) = B(v_1, v_2) - B(v_0, v_2) + B(v_0, v_1).$$

On sait que $\mu \in Z^2(\Lambda, \mathbb{Z})$. De plus,

4.10. PROPOSITION. *Sur* $\Lambda \times \Lambda \times \Lambda$, *on a*

$$\mu(l_0, l_1, l_2) = m(l_0^{\mathbb{C}}, l_1^{\mathbb{C}}, l_2^{\mathbb{C}}).$$

Preuve. Du fait que m et μ vérifient l'identité de cocycle, il suffit de vérifier l'égalité lorsque l_0 et l_2 sont transverses. On sait [13] qu'il existe alors une base symplectique (P_j, Q_j) de V telle que

$$l_0 = \bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant r} \mathbb{R} P_j, \qquad l_2 = \bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant r} \mathbb{R} Q_j,$$

$$l_1 = \mathbb{R}(P_1 + Q_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}(P_p + Q_p) \oplus \mathbb{R}(P_{p+1} - Q_{p+1})$$
$$\oplus \cdots \oplus \mathbb{R}(P_{p+q} - Q_{p+q}) \oplus \mathbb{R} P_{p+q+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R} P_r.$$

et que, dans ce cas, $\mu(l_0, l_1, l_2) = p - q$.

Pour calculer $m(l_0^{\mathbb{C}}, l_1^{\mathbb{C}}, l_2^{\mathbb{C}})$, on choisit O de telle sorte que la structure complexe associée J de V donnée en **1.1** soit telle que $JP_j = Q_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$. Pour $k = 0, 1, 2$, associons à $l_k^{\mathbb{C}}$ les endomorphismes T_k définis dans la Proposition 4.1. Alors $l_k = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_V - T_k)$ et $Jl_k = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_V + T_k)$. Les P_j sont des vecteurs propres (associés à des valeurs propres complexes) des endomorphismes $\mathrm{Id}_V - T_k T_{k'} = \alpha^{-1}(\mathrm{Id}_O - Z_k \bar{Z}_{k'})\alpha$ de (V, J). Un calcul explicite donne

$$\chi(l_0^{\mathbb{C}}, l_1^{\mathbb{C}}) = \chi(l_1^{\mathbb{C}}, l_2^{\mathbb{C}}) = \tfrac{1}{2}(p-q), \chi(l_0^{\mathbb{C}}, l_2^{\mathbb{C}}) = 0.$$

Par conséquent $m(l_0^{\mathbb{C}}, l_1^{\mathbb{C}}, l_2^{\mathbb{C}}) = p - q$, d'où la Proposition 4.10.

Soit $x \in X$ et y un sous-espace vectoriel isotrope de (V, B). Dans ce qui suit, nous posons $x^y = y^{\mathbb{C}} + x \cap y^{\perp}$. On vérifie que $x^y \in X$.

4.11. Proposition. (1) *Soient W' et W'' deux sous-espaces vectoriels de V tels que $V = W' \oplus^{\perp} W''$, auxquels on associe les éléments m' et m'' de $Z^2(X(W'), \mathbb{R})$ et de $Z^2(X(W''), \mathbb{R})$ donnés par le Théorème* 4.7. *Soient, pour $j = 0, 1, 2$, $x_j' \in X(W')$, $x_j'' \in X(W'')$, et $x_j = x_j' \oplus x_j'' \in X$. Alors,*

$$m(x_0, x_1, x_2) = m'(x_0', x_1', x_2') + m''(x_0'', x_1'', x_2'').$$

(2) *Soient $x_0, x_1 \in X$ et y un sous-espace vectoriel de $x_1 \cap V$. On a alors $m(x_0, x_0^y, x_1) = 0$.*

(3) *Soient $x_0, x_1, x_2 \in X$ et y un sous-espace vectoriel (nécessairement isotrope) de $x_1 \cap x_2 \cap V + x_0 \cap x_2 \cap V + x_0 \cap x_1 \cap V$. Alors*

$$m(x_0^y, x_1^y, x_2^y) = m(x_0, x_1, x_2).$$

Preuve. On peut choisir O de telle sorte que $O = O \cap W'^{\mathbb{C}} \oplus O \cap W''^{\mathbb{C}}$. Dans ce cas $O \cap W'^{\mathbb{C}}$ et $O \cap W''^{\mathbb{C}}$ sont stables par $\mathrm{Id}_O - Z_j \bar{Z}_k$, $(j, k \in \{0, 1, 2\})$. Le (1) est alors une conséquence de la Proposition 4.8. On déduit le (2) du (1), puis en appliquant l'identité de cocycle, le (3) du (2).

En utilisant les Propositions 4.11 et 4.8, on vérifie la

4.12. Proposition. *Soient x_0, $x_1, x_2 \in X$, posons*

$$(x_1 \cap x_2 \cap V + x_0 \cap x_2 \cap V + x_0 \cap x_1 \cap V) = y.$$

Alors $|m(x_0, x_1, x_2)| \leqslant r - p$ où $r = \frac{1}{2}\dim V$ et $p = \dim y$.

5. Réalisation du Recouvrement Universel du Groupe Symplectique et Représentation de Shale–Weil du Groupe Métaplectique

Dans ce paragraphe, nous mettrons en évidence certaines propriétés cohomologiques des éléments m_1, m_2, m et μ de $Z^2(X^0, \mathbb{C}^*)$, $Z^2(X, \mathbb{T})$, $Z^2(X, \mathbb{R})$, et $Z^2(\Lambda, \mathbb{Z})$ définis dans le paragraphe précédent puis leurs conséquences au niveau des groupes et des T-espaces associés. Le groupe symplectique étant égal à son groupe dérivé, nous utiliserons plusieurs fois le fait que **2.15** s'applique.

Comme dans **2.10**, on associe à $x \in X^0$, l'élément $x^*(m_1)$ de $Z^2(G, \mathbb{C}^*)$, à $x \in X$, les éléments $x^*(m_2)$ de $Z^2(G, \mathbb{T})$, et $x^*(m)$ de $Z^2(G, \mathbb{R})$ puis à $l \in \Lambda$, l'élément $l^*(\mu)$ de $Z^2(G, \mathbb{Z})$.

5.1. PROPOSITION. *Soit $x \in X^0$ (resp. X), alors, avec les notations de la Proposition* 2.11, $x^*(m_1)^2 \in B^2(G, \mathbb{C}^*)$ *(resp.* $x^*(m_2)^2 \in B^2(G, \mathbb{T})$*). On a un élément unique $n_1(x)$ (resp. $n_2(x)$) de $C^1(G, \mathbb{C}^*)$ (resp. $C^1(G, \mathbb{T})$) tel que* $x^*(m_1)^2 = d\dot{n}_1(x)$ *(resp.* $x^*(m_2)^2 = e^{i(\pi/2)x^*(m)} = dn_2(x)$*). De plus, dans les notations de* **1.2**,

$$n_1(x)(e, g) = \det a_x(g).$$

Preuve. D'après **2.13**, il suffit de prouver le résultat pour un seul x. Supposons x confondu avec l'origine O de X^0. On a, d'après la Proposition 4.4 puis **1.2**,

$$\begin{aligned} m_1^2(O, g_1 O, g_1 g_2 O) &= \chi_1^2(g_1 O, g_1 g_2 O) \\ &= \det a(g_1) \det a(g_2) \det^{-1} a(g_1 g_2) \end{aligned}$$

on en déduit le résultat.

5.2. PROPOSITION. *Soit μ l'indice de Maslov ordinaire.*

(1) $e^{i\pi\mu} = dv \in B^2(\Lambda, e^{i\pi\mathbb{Z}})$ *avec* $v(l_1, l_2) = (-1)^{r - \dim(l_1 \cap l_2)}$, *où* $r = \dim V$.

(2) *Soit $l \in \Lambda$, on a*

$$e^{i(\pi/2)l^*(\mu)} = dn_2(l^{\mathbb{C}}) \in B^2(G, e^{i(\pi/2)\mathbb{Z}}).$$

Preuve. (1) Utilisant l'identité de cocycle, il suffit de constater que $e^{i\pi\mu(l_0, l_1, l_2)} = dv(l_0, l_1, l_2)$ pour l_0 et l_2 transverses, ce qui se vérifie facilement (voir la preuve de la Proposition 4.10).

(2) On a d'après les Propositions 5.1 et 4.10,

$$dn_2(l^{\mathbb{C}}) = e^{i(\pi/2)l^{\mathbb{C}*}(m)} = e^{i(\pi/2)l^*(\mu)} \qquad \text{et} \qquad dn_2(l^{\mathbb{C}})^2 = e^{i\pi l^*(\mu)}$$

donc $n_2(l^{\mathbb{C}})(g_1, g_2) \in e^{i(\pi/2)\mathbb{Z}}$ puisque (d'après **2.15**), $n_2(l^{\mathbb{C}})(g_1, g_2)^2 = v(g_1 l, g_2 l)$.

Le fait que, pour $j = 1, 2$, $x^*(m_j)^2$ est de façon unique un cobord implique, d'après **2.13**, qu'on a un morphisme injectif natural ι_j' de G dans $\tilde{G}_j^2$. Le groupe G, isomorphe à $\iota_1'(G)$ (resp. $\iota_2'(G)$) agit donc naturellement sur $(\tilde{X}_1^0)^2$

(resp. $\tilde{X}_2^2$) par l'action $g, \tilde{x} \to g\tilde{x} = \iota_j'(g)\,\tilde{x}$. D'après **2.4** et (2.7.1), la fonction de Maslov s_j^2 sur $(\tilde{X}_1^0)^2 \times (\tilde{X}_1^0)^2$ (resp. $\tilde{X}_2^2 \times \tilde{X}_2^2$) vérifie les formules

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad s_j^2(\tilde{x}, \tilde{x}) = 0, \\ &\text{(ii)} \quad s_j^2(g\tilde{x}_1, g\tilde{x}_2) = s_j^2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2),\ g \in G, \\ &\text{(iii)} \quad m_2^2(x, g_1 x, g_1 g_2 x) = s_2^2(\tilde{x}, g_1 \tilde{x})^{-1}\, s_2^2(\tilde{x}, g_1 g_2 \tilde{x})\, s_2^2(\tilde{x}, g_2 \tilde{x})^{-1}. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

D'après **2.7** et **2.8**, la donnée d'un élément O de X^0 (resp. P de X) permet de munir $(\mathbb{C}^* \times G, \mathbb{C}^* \times X)$ (resp. $(\mathbb{T} \times G, \mathbb{T} \times X)$) d'une structure d'extension du T-espace (G, X^0) (resp. (G, X)) munie d'une fonction de Maslov, isomorphe à $(\tilde{G}_1^2, (\tilde{X}_1^0)^2, s_1^2)$ resp. $(\tilde{G}_2^2, \tilde{X}_2^2, s_2^2)$ et notée $(\tilde{G}_1^2(O), (\tilde{X}_1^0)^2(O), s_1^2(O))$ (resp. $(\tilde{G}_2^2(P), \tilde{X}_2^2(P), s_2^2(P))$. Soit $\iota_1'(O)$ (resp. $\iota_2'(P)$), l'injection naturelle de G dans $\tilde{G}_1^2(O)$ (resp. $\tilde{G}_2^2(P)$). On a, d'après les Propositions 2.12 et 5.1 pour le (i), et d'après la deuxième formule de (2.7.2), la Proposition 4.4 et le (b) de (1.2.1) pour le (ii) et le (iii),

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \iota_1'(O)(g) = (\det{}^{-1} a(g), g), \\ &\text{(ii)} \quad \iota_1'(O)(g)(u, x) = (u \det{}^{-1}(a(g) + b(g)\,\bar{Z}_x), gx), \\ &\text{(iii)} \quad \iota_2'(O)(g)(u, x) = (u\varepsilon \det{}^{-1}(a(g) + b(g)\,\bar{Z}_x), gx). \end{aligned}$$

La fonction de Maslov $s_j^2(O)$ sur $(\tilde{X}_1^0)^2(O)$ (resp. $\tilde{X}_2^2(O)$) est donnée par

$$s_j^2(O)((u_1, x_1), (u_2, x_2)) = u_2 u_1^{-1} \chi_j^{-2}(x_1, x_2).$$

5.3. Proposition. (1) *L'action naturelle de G sur $\tilde{X}_2^2$ est transitive sur chacun des sous-espaces $(\pi_2^2)^{-1}(X^p)$, $(0 \leqslant p < r)$.*

(2) *Les orbites de G dans $(\pi_2^2)^{-1}(X^r)$ sont des relèvements à deux feuillets de X^r, isomorphes à la grassmannienne des plans lagrangiens orientés.*

Preuve. (1) L'action de G étant transitive sur chaque X^p $(0 \leqslant p \leqslant r)$, il suffit de vérifier que l'action du sous-groupe de stabilité d'un élément P de X^p est transitive sur la fibre $(\pi_2^2)^{-1}(P)$. Pour $p = 0$, on choisit $P = O$, dont le sous-groupe de stabilité dans G est le groupe unitaire U de (V, J, H). Pour $g \in U$, on a

$$[\iota_2'(O)(g)](u, x) = (u \det{}^{-1} g, gx).$$

Comme $\det g$ prend toutes les valeurs possibles de $\mathbb{T}$, on a le résultat dans ce cas. Si $0 < p < r$, on se ramène au cas précédent: étant donné $P \in X^p$, on pose $V = W \oplus W'$, de telle sorte que $W^{\mathbb{C}} \cap P$ soit totalement complexe et que $W'^{\mathbb{C}} \cap P = (W' \cap P)^{\mathbb{C}}$. On se restreint alors au sous-groupe des éléments de G qui agissent trivialement sur $W'^{\mathbb{C}} \cap P$ et qui laissent $W^{\mathbb{C}} \cap P$ globalement invariant. Ce groupe, isomorphe à un groupe unitaire, agit transitivement sur $(\pi_2^2)^{-1}(P)$.

(2) Soit $P \in \Lambda$ et $\tilde{P}^{\mathbb{C}} \in (\pi_2^2)^{-1}(P^{\mathbb{C}})$. Posons

$$X_{\pm}^r = \{\tilde{l}^{\mathbb{C}} \mid \pi_2^2(\tilde{l}^{\mathbb{C}}) = l^{\mathbb{C}}, l \in \Lambda, s_2^2(\tilde{P}^{\mathbb{C}}, \tilde{l}^{\mathbb{C}})^2 = \nu(P, l)^{-1}\}.$$

On voit que $X_{\pm}^r$ est un relèvement à deux feuillets de X^r, stable par l'action $g, \tilde{l}^{\mathbb{C}} \to g\tilde{l}^{\mathbb{C}} = \iota_2'(g)\,\tilde{l}^{\mathbb{C}}$ de G sur $(\pi_2^2)^{-1}(X^r)$. En comparant la formule (iii) de (5.2.1) appliquée à $\tilde{x} = \tilde{l}^{\mathbb{C}}$ avec la formule analogue (1.7.6) de [13], et en utilisant **2.15**, on vérifie que $X_{\pm}^r$ est une orbite de G dans $\tilde{X}_2^2$, isomorphe à la grassmannienne des plans lagrangiens orientés.

5.4. On note $(\tilde{G}, \tilde{X}, s)$ l'élément de $E_0(X, \mathbb{R})$ associé à $m \in Z^2(X, \mathbb{R})$ par **2.8**. Si P est une origine de X, les lois de la réalisation$(\tilde{G}(P), \tilde{X}(P), s(P))$ de $(\tilde{G}, \tilde{X}, s)$ sont données par (2.7.2), avec $A = \mathbb{R}$. Si on suppose que φ est le morphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{T}$ donné par $\varphi(u) = e^{i(\pi/2)u}$, on a $(P^*(e^{i(\pi/2)m})) = dn_2(P)$. La construction de **2.14** permet d'associer à $n_2(P)$ un sous-groupe $\hat{G}$ de G qui est une extension de G par $\operatorname{Ker} \varphi = 4\mathbb{Z}$. On a

$$\hat{G}(P) = \{(u, g) \in \tilde{G}(P) \mid e^{i(\pi/2)u} = n_2(P)^{-1}(e, g)\}.$$

5.5. PROPOSITION. *Le groupe $\hat{G}$ est le revêtement universel de G.*

Preuve. Quel que soit le choix de P, $\hat{G}(P)$ est isomorphe à $\hat{G}$. De plus, lorsque $P = l^{\mathbb{C}}$, notre construction est identique à celle de Kashiwara (voir [13, 1.9]), qui donne le recouvrement universel de G. On peut aussi démontrer directement ce résultat en prenant $P = O$.

On sait que l'élément $(\tilde{G}_1, \tilde{X}_1, s_1)$ de $E_0(X^0, \mathbb{C}^*)$ est associé à $m_1 \in Z^2(X^0, \mathbb{C}^*)$. Soit $\hat{G}_1$, le sous-groupe de $\tilde{G}_1$, associé pour $P \in X^0$, à la fonction $n_1(P)$ telle que $P^*(m_1^2) = dn_1(P)$, par la construction de **2.14.** On voit que $\hat{G}_1 \simeq \hat{G}/2\mathbb{Z}$ est l'extension non triviale de G par $\{\pm 1\}$, ou groupe métaplectique. Appliquant les mêmes résultats que ci-dessus, on a la

5.6. PROPOSITION. *On peut munir $\mathbb{C}^* \times G$ d'une structure d'extension du groupe G, notée $\tilde{G}_1(O)$ dont la loi de composition interne est donnée par*

$$(u_1, g_1)(u_2, g_2) = (u_1 u_2 m_1(O, g_1 O, g_1 g_2 O), g_1 g_2).$$

On a un sous-groupe $\hat{G}_1(O)$ de $\tilde{G}_1(O)$ isomorphe au groupe métaplectique avec

$$\hat{G}_1(O) = \{(u, g) \mid u \in \mathbb{C}^*, u^2 = \det a(g)^{-1}\}.$$

Dans ce qui suit $\mathscr{H}_O$ est, comme dans **1.5** l'espace de Fock des fonctions Φ, C^∞ sur N, telles que

(i) $\Phi(n \exp tc) = e^{-i\lambda t}\Phi(n)$,

(ii) $v \to \Phi K_O^{-1}(\exp v)$ est holomorphe sur (V, J),

(iii) $\int_{N/C} |\Phi|^2 (n)\, \delta \dot{n} < \infty$.

5.7. PROPOSITION. *On a une représentation unitaire R de $\hat{G}_1(O)$ dans l'espace de Hilbert $\mathscr{H}_O$, qui est une réalisation de la représentation de Shale–Weil du groupe métaplectique donnée, pour $\Phi \in \mathscr{H}_O$ et $(u, g) \in \hat{G}_1(O)$, par*

$$(R(u,g)\,\Phi)(n) = u\,|\det a(g)| \int_{N/C} \Phi(h)\, K_O(g(h^{-1})\, n)\, \delta \dot{h}.$$

Preuve. On considère que $\tilde{G}_1$ est le groupe des automorphismes de $\mathscr{H}_O$ de la forme $u\mathscr{P}_O D(g)$ ce qui est possible d'après **3.1**, et que $\tilde{X}_1^0$ est l'espace des éléments de $\mathscr{H}_O$ de la forme $uK_{x,O}$ (voir le (2) de la Proposition 3.5). On démontre que $(K_O, \mathscr{P}_O D(g) K_O) = |\det a(g)|^{-1}$, en utilisant le Lemme 1.9 et la Proposition 4.1. L'isomorphisme de $\tilde{G}_1$ sur $\tilde{G}_1(O)$ de **2.7** fait correspondre $\det a(g)\, \mathscr{P}_O D(g)$ à $(1, g)$. D'où la Proposition 5.7.

ACKNOWLEDGMENTS

Ce travail a pour origine des questions de Michèle Vergne, il doit beaucoup à ses conseils et à ses critiques. Qu'elle trouve ici l'expression de ma reconnaissance. Une partie des résultats qui suivent se trouvent dans ma thèse de 3ème cycle. Ils ont été annoncés dans [14]. Je remercie plus particulièrement G. Lion et C. M. Marle pour l'aide qu'ils m'ont apportée lors de l'élaboration de cette thèse.

REFERENCES

1. L. AUSLANDER AND B. KOSTANT, Polarizations and unitary representations of solvable Lie groups, *Invent. Math.* **14** (1971), 255–354.
2. V. BARGMANN, On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Part I, *Comm. Pure. Appl. Math.* **14** (1961), 187–214.
3. P. BERNAT ET AL., "Représentations des Groupes de Lie Résolubles," Dunod, Paris, 1972.
4. P. CARTIER, Exposé au séminaire Bourbaki, No. 454, 1974–1975.
5. C. CHEVALLEY, "The Algebraic Theory of Spinors," Columbia Univ. Press, New York, 1954.
6. A. CRUMEYROLLES, Algèbres de Clifford symplectiques, revêtement du groupe symplectique, indices de Maslov et spineurs symplectiques, *J. Math. Pures Appl.* (9) **56** (2) (1977), 205–230.
7. J.-L. DUPONT AND A. GUICHARDET, A propos de l'article "Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels," *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **11** (1978), 293–296.
8. A. GUICHARDET AND D. WIGNER, Sur la cohomologie des groupes de Lie simples réels, *Ann. Sci. École Norm. Sup (4)* **11** (1978), 277–292.

9. H. Fujiwara, G. Lion, and B. Magneron, Opérateurs d'entrelacement et calcul d'obstruction sur des groupes de Lie résolubles, Lecture Notes in Math. No. 580, pp. 102–137, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1981.
10. A. Guichardet, "Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie," Cedic–Nathan, Paris, 1980.
11. B. Kostant, Symplectic spinors, "Symposia Math," Vol. XIV, pp. 139–152, Academic Press, New York, 1974.
12. J. Leray, "Analyse lagrangienne et mécanique quantique," Vol. 25, Publ. Math. I.R.M.A., Strasbourg, 1978.
13. G. Lion and M. Vergne, "The Weil Representation, Maslov Index and Theta Series," Birkhäuser, Boston, 1980.
14. B. Magneron, Une extension de la notion d'indices de Maslov, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math.* **289** (1979), 683–686.
15. B. Magneron, Une réalisation des groupes de Clifford par fibration en droites des groupes orthogonaux, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math.* **293** (1981), 293–296.
16. B. Magneron, Fibrations équivariantes et cohomologie des groupes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math.* **295** (1982), 645–648.
17. N. S. Poulsen, On C^∞-vectors and Intertwining Bilinear forms for Representations of Lie groups, *J. Funct. Anal.* **9** (1972), 87–120.
18. S. R. Quint, Representations of solvable groups, Lecture Notes, Univ. of California, Berkeley, 1972.
19. I. Satake, Fock representations and Theta-functions, "Advances in the theory of Riemann surfaces," Ann. of Math. Studies No. 66, pp. 393–405, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971.
20. G. Segal, A representation of the group of diffeomorphisms of the circle, notes manuscriptes, Oxford, 1978.
21. G. Segal, Unitary representations of some infinite dimensional groups, *Comm. Math. Phys.* **80** (1981), 301–342.
22. D. Shale, Linear symmetries of free boson fields, *Trans. Amer. Math. Soc.* **103** (1962), 149–167.
23. J. M. Souriau, Construction explicite de l'indice de Maslov et applications, *in* "Fourth Internat. Colloq. on Group Theoretical Methods in Physics," Univ. of Nijmegen, 1975.
24. M. Vergne, Seconde quantification et groupe symplectique, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math.* **285** (1977), 191–194.
25. A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, *Acta Math.* **111** (1964), 143–211.
26. H. Tilgner, Symplectic area, Maslov functions and cohomology, preprint.